

24. 1978.

**BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA”
TIMIȘOARA**

MATEMATICĂ — FIZICĂ

Tomul ~~23~~ (38)

Fascicola 1

23 (37)

IANUARIE—IUNIE

1978

Cititorii din străinătate se pot abona prin

I L E X I M,

Serv. Export-import presă — Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3—5 — P.O.B. 136—137

Bucharest — Romania

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA“
TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom ~~24~~³ (38)

23/37/

Fascicola 1

IANUARIE-IUNIE

1978



COLEGIUL DE REDACȚIE

- Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON,
- Conf. dr. ing. GHEORGHE CREȚU,
- Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef,
- Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R.
- Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU
- Prof. dr. ing. VASILE COCHECI
- Prof. dr. BORISLAV CRSTICI
- Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
- Prof. dr. ing. TOMA DORDEA
- Conf. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ
- Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS
- Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU
- Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN
- Conf. dr. ing. IOAN NIȚĂ
- Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII
- Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA
- Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu



COMITETUL DE REDACȚIE

I. Matematică-Fizică

- Prof. dr. BORISLAV CRSTICI — redactor responsabil
- Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
- Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — redactor responsabil adj.
- Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU
- Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA“ TIMIȘOARA

Tomul 24 (38)

Fascicola 1

ianuarie-iunie 1978

MATEMATICĂ—FIZICĂ

S U M A R

I. Matematică

H. S. P. SRIVASTAVA : Unele rezultate privind funcții generalizate de două variabile și polinoamele Gegenbauer	5
Gh. TUDOR : Asupra zerourilor unor funcții analitice	9
I. STURZ : Integrarea aproximativă a unor ecuații diferențiale particulare	12
Gh. BADESCU : Mărginirea și continuitatea semigrupurilor de operatori de genul cosinus-exponențial	15
ELENA TOPUZU : Proprietăți ale mulțimii accesibile în spații Hilbert	18
S. POENARU : Operatori definiți pe produse carteziene de spații euclidiene	22
B. C. PACHPATTE : Asupra unor inegalități integrale fundamentale cu aplicații.	25
Cs. HATVANY : Asupra deformațiilor de omomorfisme analitice netede	34
O. LIPOVAN : Asupra măsurilor de probabilitate din subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite	37

II. Fizică

COLETA DE SABATA ; C. MARCU ; I. MIHALCA ; I. LUMINOSU : Studiul absorbției infraroșii la unele substanțe folosite la acumularea energiei solare	41
COLETA DE SABATA ; AURICA MUNTEANU ; C. MARCU ; DOROTHEA MIHAILEVICI : Cercetări de laborator privind mărirea randamentului optic la insolatori plani	43
MINERVA CRISTEA : Susceptibilitatea magnetică în sistemul oxizilor izomorfi $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{—AL}_2\text{O}_3\text{—Cr}_2\text{OH}_3$	46
COLETA DE SABATA ; C. MARCU ; A. KUN ; A. HUSCHITT ; N. GORGAN ; G. HAIM : Considerații asupra mecanismelor elementare de modificare a stării magnetice reflectate în curba $X_m=f(H)$	50
COLETA DE SABATA ; I. LUMINOSU : Analiza contribuției efectului de seră simplu și dublu la optimizarea funcționării unui insolator plan	55

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA“ TIMIȘOARA

Tome 24 (38)

Fascicule 1

Janvier-Juin 1978

M A T H E M A T I Q U E — P H Y S I Q U E

S U M A R

I. Mathematique

H. S. P. SRIVASTAVA : Some Results involving generalized function of two variables and Gegenbauer polynomials.....	5
Gh. TUDOR : Sur les zéros des quelques fonctions analytiques	9
I. STURZ : L'intégration approximative des quelques équations différentielles particulières	12
Gh. BABESCU : Über die Begrenztheit und Statigkeit der Halbgruppen von Operatoren des art Kosinus-exponential	15
ELENA TOPUZU : Properrtiers of accesible set in Hilbert spaces	18
S. POENARU : Lineare Operatoren definiert auf kartesische Produkte von euklidischen Räumen	22
B. G. PACHPATTE : On some fundamental integral inequalities with applications	25
Cs. HATVANY : On the deformations of flat analytic homomorphisms	34
O. LIPOVAN : Sur les mesures de probabilités dans les sous-espaces de l'espace de Banach des mesures réelles et bornées.	37

II. Physique

COLETA DE SABATA ; C. MARCU ; I. MIHALCA ; I. LUMINOSU : Das Studium der Infrarotenabsorbtion einiger Stoffe die bei der Anlagerung des Sonnenenergie verwendet werden	41
COLETA DE SABATA ; AURICA MUNTEANU ; C. MARCU ; DOROTHEA MIHAILOVICI : Laboratoriumforschungen über die Vergrößerung der optischen Leistung der ebenen Insolatoren	43
MINERVA CRISTEA : La susceptibilité magnetique dans le système des oxydes iso-morphes Fe_2O_3 — Al_2O_3 — Cr_2O_3	46
COLETA DE SABATA ; C. MARCU ; A. KUN ; A. HUSCHITT ; M. GORGAN ; G. HAIM : Considérations sur les mécanismes élémentaires de modification de l'état magnétique reflétée dans la courbe $X_m=f(H)$	50
COLETA DE SABATA ; I. LUMINOSU : L'Analyse de la contribution de l'effet de la serre simple et double pour l'optimisation de fonctionnement d'un insolateur plan ..	55

SOME RESULTS INVOLVING GENERALIZED FUNCTION OF TWO VARIABLES AND GEGENBAUER POLYNOMIALS

By

H. S. P. SRIVASTAVA

1. Introduction : Mourya [3] has introduced a generalized function of two variables by means of a double Mellin-Barnes type contour integral which will be represented as follows :

$$M \begin{matrix} (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) \\ (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}, A_{p_1})); ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}, B_{q_1})); ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_L \int_T m(s+t) n(s, t) x^s y^t ds dt, \quad (1.1)$$

where

$$m(s+t) = \frac{\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(b_j - B_j s - B_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + A_j s + A_j t)}{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(1 - b_j + B_j s + B_j t) \prod_{j=1}^{p_1} \Gamma(a_j - A_j s - A_j t)} \quad (1.2)$$

and

$$n(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + C_j s) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{j=1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j s) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{j=1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t)} \quad (1.3)$$

where $((\alpha_r, \beta_r))$ stands for the set of the parameters $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$.

The integral (1.1) converges absolutely, if

$$|\arg x| < \frac{1}{2} R_1 \pi, \quad |\arg y| < \frac{1}{2} R_2 \pi, \quad \text{where}$$

$$R_1 = \left(\sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{n_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{q_2} D_j \right) \quad (1.4)$$

$$R_2 = \left(\sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} F_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{q_3} F_j \right). \quad (1.5)$$

The double contour integral defined in (1.1) will be denoted in a contracted form by $M(x, y)$. To write the results in an elegant form only those sets of parameters of the M -function will be mentioned where there is any change, for example.

$$M \begin{matrix} (m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+2, p_2, p_3), (q_1+2, q_2, q_3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\alpha, k), ((a_{p_1}, A_{p_1})); (\delta, k); ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ (\beta, t), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (r, t); ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

will be written as

$$M \begin{matrix} (m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+2, p_2, p_3), (q_1+2, q_2, q_3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] \begin{matrix} (\alpha, k), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (\delta, k) \\ (\beta, t), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (r, t) \end{matrix} \right].$$

In what follows, for the sake of brevity

$$P = \min (b_h/B_h + d_j/D_j); \quad Q = \min (b_h/B_h + f_i/F_i) \\ (h=1, 2, \dots, m_1; j=1, 2, \dots, m_3; i=1, 2, \dots, m_3).$$

We require the following known relations for the development of present work. Gegenbauer polynomials defined by generating relation [4, p. 276 (1)]:

$$(1-2xt+t^2)^{-v} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^v(x) t^n \quad (1.6)$$

satisfy the following relations which are required in the investigations.

(i) The orthogonality-property [4, p. 281 (27)–(28)].

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{v-\frac{1}{2}} C_n^v(x) C_m^v(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq n \\ \frac{2^{1-2v} \pi \Gamma(n+2v)}{n! (v+n) [\Gamma(v)]^2}, & \text{if } m = n \end{cases} \quad (1.7)$$

(ii) The expansion as given by Askey [1]

$$(\sin \theta)^{2\beta} C_l^\beta(\cos \theta) = \sum_{u=0}^{\infty} A_{u,l}^{\beta,\alpha} C_{l+2u}^\alpha(\cos \theta) (\sin \theta)^{2\alpha}, \quad (1.8)$$

where $\frac{1}{2}(\alpha-1) < \beta < \alpha$, $A_{u,l}^{\beta,\alpha} > 0$ and

$$A_{u,l}^{\beta,\alpha} = \frac{2^{2\alpha-2\beta} \Gamma(\alpha) (l+2u+\alpha) (l+2u)! \Gamma(l+2\beta) \Gamma(l+u+\alpha) \Gamma(u+\alpha-\beta)}{l! u! \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(l+u+\beta+1) \Gamma(l+2u+2\alpha)}$$

(iii) The expansion formula [4, p. 283 (37)]:

$$C_n^v(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (v)_k (v)_n}{k! n! (1-v-n)_k} \cos(n-2k)\theta. \quad (1.9)$$

2. Expansion theorem: In this section we shall establish the following expansion formula:

$$\sum_{u=0}^{\infty} \frac{2^{2\alpha-2} \Gamma(\alpha) (l+2u+\alpha) (l+2u)! \Gamma(l+u+\alpha)}{u! \Gamma(l+2u+2\alpha)} \quad (2.1)$$

$$C_{l+2u}^\alpha(\cos \theta) (\sin \theta)^{2\alpha-2}$$

$$M \begin{matrix} (m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+3, q_2, q_3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} 4^\lambda x \\ 4^\lambda y \end{matrix} \right] \begin{matrix} (2-\alpha-u, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (l+u+2, \lambda) \\ (l+2, 2\lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (2-\alpha, \lambda) \end{matrix} \right] = \\ = \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k}{k!} \cos(l-2k)\theta.$$

$$M \begin{matrix} (m_1+2, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+3, q_2, q_3) \end{matrix} \left[\begin{matrix} x (\sin \theta)^{-2\lambda} \\ y (\sin \theta)^{-2\lambda} \end{matrix} \right] \begin{matrix} (1+l, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (1, \lambda) \\ (1+k, \lambda), (1+l, \lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (1+l-k, \lambda) \end{matrix} \right],$$

where $\lambda > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2} R_1 \pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2} R_2 \pi$,

$\operatorname{Re}(\alpha+u-1+\lambda P) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+u-1+\lambda Q) > 0$, $\operatorname{Re}(-l+\lambda P) > 0$,
 $\operatorname{Re}(-l+\lambda Q) > 0$ and $0 \leq \theta \leq \pi$.

Proof : Expressing M -function on the left hand side of (2.1), as Mellin-Barnes type contour integral (1.1), interchanging the order of summation and integration which is permissible under the conditions in view of [2, p. 176 (75)], we get

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T \left[\sum_{u=0}^{\infty} \frac{2^{2\alpha-2+2\lambda s+2\lambda t} \Gamma(\alpha) \Gamma(l+u+\alpha) (l+2u)! (l+2u+\alpha)}{l! u! \Gamma(1-\lambda s-\lambda t) \Gamma(\alpha-1+\lambda s+\lambda t)} \right. \\ \left. \frac{\Gamma(l+2-2\lambda s-2\lambda t) \Gamma(l+u+\lambda s+\lambda t-1)}{\Gamma(l+u+2-\lambda s-\lambda t) \Gamma(l+2u+2\alpha)} C_{l+2u}^{\alpha}(\cos \theta) (\sin \theta)^2 \right] \\ m(s+t) n(s, t) x^s y^t ds dt. \quad (2.2)$$

Evaluating the series inside the contour integral with the help of (1.8), we have

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T (\sin \theta)^{2-2\lambda s-2\lambda t} C_l^{1-\lambda s-\lambda t}(\cos \theta) m(s+t) n(s, t) x^s y^t ds dt. \quad (2.3)$$

Now using (1.9) and interchanging the order of summation and integration, we obtain

$$(\sin \theta)^2 \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k}{k! l!} \left[\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T \frac{\Gamma(1+k-\lambda s-\lambda t) \Gamma(1+l-s-\lambda t)}{\Gamma(1-\lambda s-\lambda t) \Gamma(1-\lambda s-\lambda t)} \right. \\ \left. \frac{\Gamma(1-1-l+\lambda s+\lambda t)}{\Gamma(1-1-\lambda+k+\lambda s+\lambda t)} \left(\frac{x}{\sin \theta^{2\lambda}}\right)^s \left(\frac{y}{\sin \theta^{2\lambda}}\right)^t m(s+t) n(s, t) ds dt \right] \cos(l-2k)\theta. \quad (2.4)$$

Again using (1.1), we get the right hand side of (2.1).

3. Integral : The following integral will be evaluated in this section.

$$\sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k}{k!} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta C_{l+2r}^{\alpha}(\cos \theta) \cos(l-2k)\theta \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} M \\ \text{---} \end{matrix} (m_1+2, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \left[x (\sin \theta)^{-2\lambda} \middle| (1+l, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (1, \lambda) \right. \\ & \left. (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+3, q_2, q_3) \left[y (\sin \theta)^{-2\lambda} \middle| (1+k, \lambda), (1+l, \lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (1+l-k, \lambda) \right] \right] d\theta = \\ & = \frac{\pi \Gamma(l+r+\alpha)}{2r! \Gamma(\alpha)} \\ & \begin{matrix} M \\ \text{---} \end{matrix} (m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \left[4^{\lambda} x \middle| (2-\alpha-r, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (l+r+2, \lambda) \right] \\ & (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+2, q_2, q_3) \left[4^{\lambda} y \middle| (l+2, 2\lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (2-\alpha, \lambda) \right], \end{aligned}$$

where $\lambda > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2} R_1 \pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2} R_2 \pi$,

$\text{Re}(-l+\lambda P) > 0$, $\text{Re}(-l+\lambda Q) > 0$, $\text{Re}(\alpha+r-1+\lambda P) > 0$,

$\text{Re}(\alpha+r-1+\lambda Q) > 0$, and $0 \leq \theta \leq \pi$, $r=0, 1, 2, \dots$.

Proof : Multiplying both the sides of (2.1) by $C_{l+2r}^{\alpha}(\cos \theta)$; integrating with respect to θ from 0 to π ; on the left hand side interchanging the order of summation and integration and using the orthogonality property of Gegenbauer polynomials (1.7), we get the required result (3.1).

4. Particular cases : In this section we discuss two interesting particular cases of the expansion theorem.

(i) In (2.1) taking $\alpha=1$ and using the known relation $C_n^1(\cos \theta) = \sin(n+1)\theta (\sin \theta)^{-1}$, we have

$$\sum_{u=0}^{\infty} \frac{(l+u)!}{u!} \sin(l+2u+1)\theta \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} M \\ \text{---} \end{matrix} (m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \left[4^{\lambda} x \middle| (1-u, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (l+u+2, \lambda) \right] = \\ & (p_1+1, p_2, p_3), (q_1+2, q_2, q_3) \left[4^{\lambda} y \middle| (l+2, 2\lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (1, \lambda) \right] \\ & = (\sin \theta) \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k}{k!} \cos(l-2k)\theta \end{aligned}$$

$$M_{\substack{(m_1+2, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+3, q_2, q_3)}} \left[\begin{matrix} x (\sin \theta)^{-2\lambda} \\ y (\sin \theta)^{-2\lambda} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1+l, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (1, \lambda) \\ (1+k, \lambda), (1+l, \lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (1+l-k, \lambda) \end{matrix} \right. \right],$$

provided $\lambda > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2} R_1 \pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2} R_2 \pi$,

$Re(u + \lambda P) > 0$, $Re(u + \lambda Q) > 0$, $Re(-l + \lambda P) > 0$, $Re(-l + \lambda Q) > 0$,
and $0 \leq \theta \leq \pi$.

(ii) In (4.1), putting $l=0$, we get an interesting expansion formula :

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sin(2u+1)\theta \quad (4.2)$$

$$M_{\substack{(m_1+1, m_2, m_3), (n_1+1, n_2, n_3) \\ (p_1+3, p_2, p_3), (q_1+2, q_2, q_3)}} \left[\begin{matrix} 4^\lambda x \\ 4^\lambda y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-u, \lambda), ((a_{p_1}, A_{p_1})), (1, \lambda), (u+2, \lambda) \\ (2, 2\lambda), ((b_{q_1}, B_{q_1})), (1, \lambda) \end{matrix} \right. \right] = \\ = (\sin \theta) M [x (\sin \theta)^{-2\lambda}, y (\sin \theta)^{-2\lambda}],$$

where $\lambda > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2} R_1 \pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2} R_2 \pi$,

$Re(u + \lambda P) > 0$, $Re(u + \lambda Q) > 0$, $Re(\lambda P) > 0$, $Re(\lambda Q) > 0$, and $0 \leq \theta \leq \pi$.

Acknowledgement : The author expresses his sincerest thanks to Dr. P. Anandani, for his valuable suggestions and help, during the preparation of this paper.

REFERENCES

1. Askey, Richard (1965): Orthogonal expansions with positive coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1191=94.
2. Carslaw, H. S. (1950): Introduction to the theory of Fourier's Series and integrals, Dover Publications, New York.
3. Mourya, D. P. (1970): The generalised hypergeometric function of two variables its analytic continuations and asymptotic expansions. A Ph.+D. Thesis. University of Indore (India).
4. Rainville, E. D. (1960): Special Functions. Macmillan Co., New York.

SUR LES ZÉROS DES QUELQUES FONCTIONS ANALITIQUES

par

GH. M. TUDOR

Dans ce travail nous considérons la classe $\mathcal{H}^+$ des fonctions f de la forme suivante

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k > 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad |z| < R \quad (1)$$

où nous avons noté R — le rayon de convergence de la série (1).

Soient p fonctions $f_1, f_2, \dots, f_p \in \mathcal{H}^+$ notées :

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i z^k, \quad |z| < R_i, \quad i=1, \dots, p \quad (2)$$

Soit la fonction

$$F(z) = \sum_{s=1}^p A_s f_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^p A_s a_k^s z^k \quad (3)$$

où $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont réels positifs. Soit R^* le rayon de convergence de la série (3).

Nous posons le problème de déterminer effectivement un voisinage V_0 de 0 avec la propriété

$$F(z) \neq 0, \quad \forall z \in V_0 \quad (4)$$

D'abord, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega(f_s) &= \inf_k \left\{ \frac{k a_k^s}{(k+1) a_k^s} \right\}, \quad \bar{\omega}(f_s) = \min \left(\omega(f_s), \frac{a_0^s}{a_1^s} \right) \\ \lambda_k^p &= \sum_{s=1}^p A_s a_k^s, \quad \omega(F) = \inf_k \left\{ \frac{k \lambda_k^p}{(k+1) \lambda_{k+1}^p} \right\} \\ \bar{\omega}(F) &= \min \left(\omega(F), \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. Tous les zéros de la fonction $W=F(z)$ tels que $|z| < R^*$ sont situés dans le domaine

$$\min_s \{ \bar{\omega}(f_s) \} \leq |z| < R^* \quad (6)$$

et tous les zéros complexes de la fonction $W=F(z)$ tels que $|z| < R^*$ sont situés dans le domaine

$$\min_s \{ \omega(f_s) \} \leq |z| < R^* \quad (7)$$

Pour la démonstration, nous donnons d'abord, le lemme suivante :

Lemme. Tous les zéros de la fonction $W_s = f_s(z)$ qui satisfont l'inégalité $|z| < R_s$ sont situés dans la couronne

$$\tilde{\omega}(f_s) \leq |z| < R_s \quad (8)$$

et tous les zéros complexes de la fonctions $W_s = f_s(z)$ qui satisfont l'inégalité $|z| < R_s$, sont situés dans la couronne :

$$\tilde{\omega}(f_s) \leq |z| < R_s \quad (9)$$

Démonstration. En posant $z = re^{i\varphi}$ nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\Re f_s(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(r, \varphi, \bar{a}^s) \quad (10)$$

$$\Im f_s(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(r, \varphi, \bar{a}^s)$$

où nous avons noté :

$$K_n(r, \varphi, \bar{a}^s) = \Delta_0^s(r) + \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v^s(r) \sigma_v^*(\varphi) r^v + n a_n^s r^n \sigma_n^*(\varphi) \quad (11)$$

$$I_n(r, \varphi, \bar{a}^s) = \sum_{v=1}^{n-1} \Delta_v^s(r) \sigma_v(\varphi) r^v + n a_n^s r^n \sigma_n(\varphi) \quad (12)$$

où

$$\Delta_0^s(r) = a_0^s - a_1^s r, \quad \Delta_v^s(r) = v a_v^s - (v+1) a_{v+1}^s r,$$

et

$$\sigma_n(\varphi) = \frac{df}{dv} \sum_{v=1}^n \frac{\sin v\varphi}{v}, \quad \sigma_n^*(\varphi) = 1 + \sum_{v=1}^n \frac{\cos v\varphi}{v}.$$

Tenant compte que [1] :

$$\sigma_n(\varphi) > 0, \quad \varphi \in]_0, \pi[, \quad n \in N \quad (\text{FEJÉR-JACKSON})$$

$$\sigma_n^*(\varphi) > 0, \quad \varphi \in]_0, \pi[, \quad n \in N \quad (\text{W. H. YOUNG}).$$

de (10), (11) et (12) il en résulte le lemme.

De ce lemme, nous pouvons tirer :

CORROLAIRE. a) Si $\omega(f_s) = R_s$ alors, la fonction $W_s = f_s(z)$ n'admet pas les zéros complexes dans le domaine $|z| < R_s$,

b) Si $\tilde{\omega}(f_s) = R$ alors la fonction $W_s = f_s(z)$ ne s'annule pas pour $|z| < R_s$

Dans la suite, nous notons : $L_0^*(F)$ l'ensemble des zéros complexes de la fonction $W = F(Z)$ pour quels $|z| < R^*$ et $L_0(F)$ l'ensemble des zéros de la fonction $W = F(z)$, pour quels $|z| < R^*$

Nous avons :

Si $Z_0^* \in L_m^*(F)$ alors

$$\omega_0(F) \leq |z_0^*| < R^* \quad (13)$$

et si $Z_0 \in L_0(F)$ alors

$$\tilde{\omega}(F) \leq |z_0| < R^* \quad (14)$$

Nous allons montrer que

$$\omega(F) \geq \min_s \{\omega(f_s)\} \quad (15)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\omega(F) &= \inf_k \left\{ \frac{k \lambda_k^p}{(k+1) \lambda_{k+1}^p} \right\} = \inf_k \left\{ \frac{\sum_{s=1}^p A_s k a_k^s}{\sum_{s=1}^p A_s (k+1) a_{k+1}^s} \right\} \geq \\ &\geq \inf_k \left\{ \min_s \left(\frac{k a_k^s}{(k+1) a_{k+1}^s} \right) \right\} = \min_s \{ \omega(f_s) \}\end{aligned}\quad (16)$$

De (13) et (16) il en résulte (7).

Tenant compte que

$$\min_s \left(\frac{a_0^s}{a_1^s} \right) \leq \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\sum_{s=1}^p A_s a_0^s}{\sum_{s=1}^p A_s a_1^s} \leq \max_s \left(\frac{a_0^s}{a_1^s} \right) \quad (17)$$

nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(F) &= \min \left(\omega(F), \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \geq \min \left[\min_s \{ \omega(f_s) \}, \min_s \left(\frac{a_0^s}{a_1^s} \right) \right] = \\ &= \min_s \left\{ \min \{ \omega(f_s), \frac{a_0^s}{a_1^s} \} \right\} = \min_s \{ \tilde{\omega}(f_s) \}.\end{aligned}$$

De cette inégalité et de (14) il en résulte (6) et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. S. Mitrović, (In cooperation with P. M. Vasić): *Analytic Inequalities*. Berlin-Heidelberg-New York 1970.
2. E. Landau, Sur quelques théorèmes de M. Petrović relatifs aux zéros des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France* 33 (1905), 251–261.
3. N. Bourbaki, *Topologie générale*, deuxième édition, chap. 8 Nombres complexes, § 1.
4. D. M. Simeunović, Sur les limites des modules des zéros des polynômes. *Mat. Vesnik* 4 (19) (1967) 293–298.

INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE PARTICULARE

DE

I. STURZ

Prezenta lucrare își propune să cerceteze în ce condiții soluția unei ecuații diferențiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienți variabili, cu condiții inițiale date :

$$y^{(k)}(x_0) = y_k; \quad k = \overline{0, n-1}; \quad y_k \in R, \quad (1)$$

poate fi aproximată, pe o anumită vecinătate a lui x_0 , printr-o combinație liniară de puteri ale unei aceleiași funcții $f(x)$.

Cu alte cuvinte, notînd cu $y_0(x)$ soluția căutată, vrem să avem :

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^n h_k f^{r_k}(x); \quad x \in (x_0 - d_1, x_0 + d_2); \quad h_k, r_k \in C, \quad (2)$$

în ipoteza continuității tuturor coeficienților $a_k(x)$, într-o vecinătate ce conține pe cea amintită mai sus, pentru ecuația ;

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_k(x) y^{(n-k)} = 0. \quad (3)$$

Combinația liniară din (2), în ipoteza că avem : $r_k \neq r_j$ pentru $k \neq j$ și h_k lăsîndu-i arbitrari, se dovedește a fi soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare, omogene, de ordin n .

Acest lucru rezultă din faptul că șirul de funcții $f^{r_k}(x)$, în aceste condiții este liniar independent.

În acest scop s-a calculat wronskianul funcțiilor acestui șir, pe baza unor proprietăți ale wronskienilor, printre care proprietățile de omogeneitate :

$$W(l_1 y_1, \dots, l_n y_n) = \left(\prod_{k=1}^n l_k \right) W(y_1, \dots, y_n), \quad (a)$$

unde : l_k sînt constante ;

$$W(v(x) y_1, \dots, v(x) y_n) = v^n(x) W(y_1, \dots, y_n), \quad (b)$$

$v(x)$ fiind de clasă $C^{n-1} [a, b]$.

Din ultima proprietate se deduce cu ușurință relația :

$$W(y_1, \dots, y_n) = y_k^n W\left[\left(\frac{y_1}{y_k}\right)', \dots, \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)', \left(\frac{y_{k+1}}{y_k}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_k}\right)'\right],$$

relație care pune în evidență sistemul fundamental de soluții pentru ecuația cu ordinul redus cu o unitate, în urma găsirii unei soluții particulare.

Pentru wronskienii funcțiilor $f^{r_k}(x)$, s-a stabilit o formulă de recurență :

$$W(f^{r_1}, \dots, f^{r_n}) = \prod_{k=2}^n (r_k - r_1) f^{nr_1} (f')^{n-1} W(f^{r_2-r_1-1}, \dots)$$

care aplicată succesiv, conduce la :

$$W(f^{r_1}, \dots, f^{r_n}) = V(r_1, \dots, r_n) \left(\frac{f'}{f} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (f)^{\sum_{k=1}^n r_k},$$

$V(r_1, r_2, \dots, r_n)$ fiind determinantul Vandermonde al numerelor r_k , de unde se vede că dacă exponenții r_k sînt distincți și funcția $f(x)$ nu se reduce la o constantă, șirul $f^{r_k}(x)$ este liniar independent.

În scopul aproximării date de (2) trebuie să recunoaștem mai întîi dacă ecuația dată (3), nu este întîmplător o ecuație pentru care există o funcție $f(x)$ și niște valori numerice r_k astfel încît ea să admită soluția generală :

$$y = \sum_{k=1}^n C_k f^{r_k}(x).$$

În caz afirmativ integrarea propusă se face exact, rămînînd să se determine constantele C_k din condițiile inițiale.

Pentru recunoașterea amintită, s-a presupus că (3) ar avea această formă particulară și s-a procedat la identificarea ei cu ecuația construită prin anularea eliminantului funcțiilor :

$$y(x), f^{r_1}(x), \dots, f^{r_n}(x).$$

S-a constatat că pentru $n > 2$ nu se recomandă identificarea tuturor termenilor, deoarece funcția $f(x)$ se poate deduce numai din identificarea ultimilor coeficienți, trebuînd să avem identic :

$$(-1)^n \prod_{k=1}^n r_k \cdot \left(\frac{f'}{f} \right)^{n(n-1)} = a_n(x),$$

de unde integrînd această ecuație diferențială, găsim, abstracție făcînd de un factor constant :

$$f(x) = \exp \int (a_n(x)) \frac{1}{n(n-1)} dx.$$

Dacă identificarea are loc și s-a efectuat relativ la toți coeficienții, atunci se pot deduce și valorile exponenților r_k .

Odată găsită însă funcția $f(x)$, în vederea examinării dacă identificarea este posibilă, putem renunța la identificarea termen cu termen, ceea ce ar cere calcularea tuturor complementelor algebrici ai determinantului anulat, procedînd la schimbarea de variabilă :

$$f(x) = e^t$$

care va conduce, în cazul identificării posibile, la o ecuație cu coeficienți constanți :

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n b_k y^{(n-k)} = 0 \quad (4)$$

a cărei ecuație caracteristică : $P(r) = 0$, va furniza ca rădăcini ale ei, valorile exponenților r_k , iar aproximarea, exactă în acest caz, va avea chiar forma cerută, numai dacă rădăcinile sînt toate distincte, în celelalte situații intervenînd și cunoscutele combinații ce decurg din soluțiile corespunzătoare ale ecuațiilor cu coeficienți constanți.

În cazul contrar, cînd nu se ajunge la ecuații cu coeficienți constanți, ci la o ecuație de forma :

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^n c_k(t) y^{(n-k)}(t) = 0, \quad (5)$$

soluția de aproximată devine $y(t)$, cu alte condiții inițiale :

$$y^{(k)}(t_0) = z_k; \quad k = \overline{1, n},$$

iar aproximarea revine pe o vecinătate a lui t_0 , dată de schimbarea făcută.

Datorită continuității coeficienților, în cazul existenței aproximării propuse, valorile coeficienților $c_k(t)$ vor fi foarte apropiate de valorile coeficienților constanți b_k corespunzători. Cum însă în punctul t_0 ,

coeficienții b_k își au valorile lor fixe va trebui deci să cercetăm dacă există un interval comun pe care să fie satisfăcute inegalitățile :

$$|c_k(t) - b_k| < \varepsilon ; k = \overline{1, n},$$

interval care să conțină pe t_0 , determinînd în caz de posibilitate și diapazonul de valori posibile ale lui ε .

În concluzie, se va determina cu unul din procedeele descrise mai sus :

1°) funcția $f(x)$,

2°) exponenții r_k

3°) intervalul $(t_0 - e_1, t_0 + e_2)$, dacă există și intervalul corespunzător $(x_0 - d_1, x_0 + d_2)$ pe care, în funcție de comportările coeficienților $a_k(x)$, se procedează, în concordanță cu mulțimea valorilor lui ε , la o evaluare a erorii maxime δ cu care putem scrie :

$$y_0(x) \approx \overline{y(x)} = \sum_{k=1}^n h_k f^{r_k}(x)$$

cu

$$|\overline{y(x)} - y_0(x)| < \delta ; x \in (x_0 - d_1, x_0 + d_2).$$

Dacă funcția $f(x)$ este o funcție elementară uzuală, calculele de aproximare cu ajutorul calculatului se pot face comod, existînd subprograme alcătuite din timp pentru calculul valorilor ei ; în caz contrar se aproximează și $f(x)$ printr-un procedeu convenabil.

Se poate trece însă, dacă n e relativ mic, la ecuația (4), care înlocuiește aproximativ ecuația (5) și se face o listă de valori corespondente, de la t la x , respectiv de la $f(t)$ la $f(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Halanay, Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Ed. Acad. R.S.R. 1963.
2. D. V. Ionescu, Ecuații diferențiale și integrale. E.D.P. București 1964.
3. G. Marinescu, Analiza numerică. Ed. Acad. R.S.R. 1974.
4. K. Moszynski, Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare. (Traducere din limba polonă) Ed. Teh. București 1973.

L'INTÉGRATION APPROXIMATIVE DES QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTICULIÈRES

RÉSUMÉ

Dans le travail on donne une méthode de reconnaître les équations différentielles ordinaires d'ordre n , linéaires et a coefficients continues, dont le système fondamental des solutions est formé des puissances d'une même fonction $f(x)$. Pour des autres équations à coefficients variables on cherche dans les conditions initiales données, de trouver des intervalles sur lesquels la solution peut être approximée par des combinaisons linéaires des puissances de la fonction $f(x)$.

DESPRE MĂRGINIREA ȘI CONTINUITATEA SEMIGRUPURILOR DE OPERATORI DE TIPUL COSINUS-EXPONENȚIAL

DE

GH. BABESCU

0. **Introducere.** Este bine cunoscut ([1]), că funcția exponențială $f(t) = e^{at}$, a număr real sau complex este cea mai generală funcție continuă de $t \geq 0$ care satisface ecuația funcțională

$$f(t+s) = f(t) f(s) \text{ și } f(0) = 1. \quad (1)$$

Prin analogie ne așteptăm ca cea mai generală funcție operator continuă $U(t)$ definită pentru $t \geq 0$ și care satisface

$$U(t+s) = U(t) U(s) \text{ și } U(0) = I \text{ (} t, s \geq 0 \text{)}, \quad (2)$$

să fie dată de $U(t) = e^{At}$ ([6]). Tocmai această legătură a determinat un studiu al semigrupurilor de operatori prin analogie cu alte ecuații funcționale, ca de exemplu ecuația lui d'Alembert

$$f(t+s) + f(t-s) = 2f(t) f(s) \quad (3)$$

studiată și pe algebre Banach de mai mulți autori ([2], [5] etc.).

Ecuația (3) a fost extinsă la semigrupurile de operatori în ([4], [5]), unde se consideră X un spațiu Banach real sau complex, $\mathfrak{B}(X)$ algebra Banach a endomorfismelor lui X și semigrupul uni-parametric de operatori

$\{U(t); 0 \leq t < +\infty\}$, $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{B}(X)$, $U(0) = I$ și care verifică ecuația funcțional-operatorială

$$U(s+t) - 2U(s) U(t) = [U(2s) - 2U^2(s)] U(t-s), \text{ (} s, t \geq 0, s < t \text{)}. \quad (4)$$

1. Pentru semigrupurile de operatori $\{U(t)\}$, care satisfac ecuația funcțional-operatorială (2) se știe ([10]), că în anumite condiții există constantele $M > 0$ și $\gamma < +\infty$ astfel ca $\|U(t)\| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$. O proprietate analogă are loc și pentru semigrupul uniparametric de operatori $\{U(t)\}$ care verifică (4) și a cărei soluție se obține ca un produs dintre un semigrup de operatori și un operator cosinus regulat.

Propoziția 1.1. Dacă familia uni-parametrică de operatori $\{U(t); U: [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{B}(X), t \geq 0\}$ care verifică ecuația funcțional-operatorială (4), îndeplinește condițiile:

a) $U(t+s) = U(t) U(s)$, $U(0) = I$, oricare ar fi $s, t \geq 0$

b) $\log \|U(t)\| < \infty$ pentru orice $t \in [0, t_0] \subset \mathbb{R}^+$, t_0 — finit, atunci $\limsup_{t \rightarrow \infty} (1/t) \log \|U(t)\| < \infty$.

Demonstrație. Deoarece $\log \|U(t)\| < \infty$, exista un $\gamma \geq 0$, astfel ca $\|U(t)\| \leq e^{\gamma t}$. Evident atunci că și $\sup_{t \in [0, \frac{t_0}{2}]} \|U(2t)\| \leq e^{\gamma t_0}$.

Făcînd acum în (4) $t=2s$, trecînd apoi la normă în egalitatea obținută și cu cele stabilite anterior se obține că pentru orice $s \in [0, \frac{t_0}{2}]$, avem $\|U(3s)\| < \infty$. Prin inducție arătăm că pentru orice $s \in [0, \frac{t_0}{2}]$, $\|U(ns)\| \leq 3^{n-1} \cdot e^{\gamma n t_0}$.

Pentru aceasta presupunem că inegalitatea precedentă are loc pentru oricare două numere naturale consecutive $p-1$ și p și o demonstrăm pentru $p+1$, adică $\|U(p-1)s\| \leq 3^{p-2} e^{(p-1)\gamma t_0}$ și $\|U(ps)\| \leq 3^{p-1} \cdot e^{\gamma p t_0}$, oricare ar fi $t \in [0, \frac{t_0}{2}]$. În baza lui (4), făcînd $t=ps$, obținem

$$U[(p+1)s] = 2U(s) U(ps) + [U(2s) - 2U^2(s)] U[(p-1)s]$$

și aici trecind la normă obținem inegalitatea

$$\|U(p+1)s\| \leq 3^p e^{(p+1)\gamma t_0}.$$

În continuare arătăm că proprietatea are loc pentru orice $t > 0$ real.

Pentru fiecare $t > 0$ real, se poate determina $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $n \frac{t_0}{2} \leq t < (n+1) \frac{t_0}{2}$. Acum folosind (a), $U(t)$ se poate scrie

$$U(t) = 2U\left(t - \frac{nt_0}{2}\right) U\left(\frac{nt_0}{2}\right) + \left[U(2t - nt_0) - 2U^2\left(t - \frac{nt_0}{2}\right)\right] U\left[\left(\frac{nt_0}{2}\right) - \left(t - \frac{nt_0}{2}\right)\right].$$

Cu cele de mai sus, trecind la normă avem

$$\|U(t)\| \leq 3^{n+1} \cdot e^{(n+2)\gamma t_0}.$$

Logaritmind această inegalitate rezultă afirmația făcută.

Observație. Se știe că în teoria semigrupurilor de operatori, continuitatea în topologia uniformă a operatorilor față de parametrul real t , rezultă din continuitatea în vecinătatea originii ([7]). O proprietate analoagă are loc și pentru semigrupurile uniparametrice de operatori care verifică (4).

Propoziția 1.2. Dacă semigrupul uni-parametric de operatori $\{U(t); t \in [0, +\infty)\}$, $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{B}(X)$ care verifică ecuația (4), are proprietățile:

a) $U(t)U(s) = U(s)U(t)$, pentru orice $t, s \geq 0$;

b) familia $\{U(t)\}$ este continuă la dreapta originii în topologia uniformă a operatorilor, atunci familia $\{U(t)\}$ este continuă pentru orice $t > 0$ real în topologia uniformă a operatorilor.

Demonstrație. Deoarece familia $\{U(t)\}$ este continuă la dreapta originii, va exista un $\delta > 0$, astfel ca mulțimea $\{U(t); 0 \leq t < \delta\}$ să fie mărginită, de unde conform propoziției precedente, ea este chiar uniform mărginită pe orice interval finit $[0, t_0]$, ceea ce înseamnă că va exista o constantă $M \geq 1$, încît

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|U(t)\| \leq M. \text{ Facem în (4) } t = 2s, \text{ apoi aici punem } s = \frac{t}{3} \text{ și folosind (a), obținem: } U(t) = 3U\left(\frac{t}{3}\right)U\left(\frac{2t}{3}\right) - 2U^3\left(\frac{t}{3}\right).$$

Considerăm acum un $h > 0$ suficient de mic și în egalitatea precedentă înlocuind t cu $t+h$ avem: $U(t+h) = 3U\left(\frac{t+h}{3}\right)U\left(\frac{2t+2h}{3}\right) - 2U^3\left(\frac{t+h}{3}\right)$. Din nou folosind (a) diferența $U(t+h) - U(t)$, se poate pune sub forma:

$$U(t+h) - U(t) = 3\left[U\left(\frac{t+h}{3}\right) - U\left(\frac{t}{3}\right)\right]U\left(\frac{2t}{3}\right) + 3U\left(\frac{t+h}{3}\right)\left[U\left(\frac{2t+2h}{3}\right) - U\left(\frac{2t}{3}\right)\right] - 2\left[U\left(\frac{t+h}{3}\right) - U\left(\frac{t}{3}\right)\right]\left[U^2\left(\frac{t+h}{3}\right) + U\left(\frac{t+h}{3}\right)U\left(\frac{t}{3}\right) + U^2\left(\frac{t}{3}\right)\right]. \quad (5)$$

Fie acum $t > 0$ arbitrar dar fixat și alegem $t_0 > \max\left\{2t, \frac{3\delta}{2}\right\}$.

Atunci pentru un $\varepsilon > 0$ oarecare dat și pentru $0 \leq t < t+h < 3\frac{\delta}{2}$, în baza continuității la dreapta originii a familiei $\{U(t)\}$, se poate alege un $\tau > 0$, astfel ca $\left\|U\left(\frac{t+h}{3}\right) - U\left(\frac{t}{3}\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{12M(M+1)}$ și $\left\|U\left(\frac{2t+2h}{3}\right) - U\left(\frac{2t}{3}\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{12M(M+1)}$ pentru $0 < h < \tau < \frac{3\delta}{2} - t$.

Trecind la normă în egalitatea (5) și folosind aceste evaluări se obține $\|U(t+h) - U(t)\| < \varepsilon$. Deci continuitatea lui $\{U(t)\}$ la dreapta originii pentru $t \in [0, \delta]$, implică continuitatea sa pentru $t \in \left[0, \frac{3\delta}{2}\right]$. Repetind raționamentul rezultă continuitatea lui $\{U(t)\}$ la dreapta pentru orice $t > 0$ real.

Ținând cont de (4) și punind sub o formă convenabilă expresia $U(t+h)-2U(t)+U(t-h)$, trecînd apoi la normă și cu cele stabilite mai sus, pentru $h < \frac{2\tau}{3}$ și $0 \leq t-h < h < t+h < t_0$, se obține $\|U(t+h)-2U(t)+2U(t-h)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce este echivalent cu $\lim_{h \rightarrow 0} [U(t+h)-2U(t)+U(t-h)] = 0$, în topologia uniformă a operatorilor, de unde $U(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t+h)+U(t-h)}{2}$, oricare ar fi $t \in [0, +\infty)$. Cu aceasta $\lim_{h \rightarrow 0} [U(t)-U(t-h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \{[U(t+h)-U(t)] - [2U(t+h)-2U(t)+U(t-h)]\} = \lim_{h \rightarrow 0} [U(t+h)-U(t)] = 0$, ceea ce înseamnă că familia $\{U(t)\}$ este continuă și la stînga pentru orice $t > 0$ finit real și propoziția deci are loc.

ÜBER DIE BEGRENZTHEIT UND STETIGKEIT DER HALBGRUPPEN VON OPERATOREN DER ART KOSINUS-EXPONENTIAL

INHALT

In dieser Arbeit werden zwei Lehrsätze, in bezug auf die Begrenztheit und Stetigkeit der Halbgruppen von Operatoren mit einem Parameter, angegeben, Operatoren welche die Funktionaloperatorialgleichung

$$U(s+t)-2U(s)U(t) = \{U(2s)-2U^2(s)\}U(t-s)$$

der Art Kosinusexponential erfüllen.

BIBLIOGRAFIE

1. Aczél, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, (Academic Press, New York-London 1966).
2. Babescu, G. h., On the d'Alembert's Functional Equation in the Banach Algebras, Buletinul științific și tehnic al I.P. „Traian Vuia” Timișoara, Tom 21 (35), Fasc. 2—1976.
3. Baker, J. A., The d'Alembert's Functional Equations in the Banach Algebras, Acta Sci. Math Tomus 32. Fasc. 3—4. Szeged 1971.
4. Buche, A. B., On an exponential-cosine operator-valued functional equation, Notices of the American Mathematical Society, vol. 20. nr. 2. 1973
5. Buche, A. B., and Bharucha-Reid, A. T., On some Functional Equations Associated with Semi-groups of Operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1968.
6. Butzer, P. L., and Berens, H., Semi-Groups of Operators and Approximation (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967).
7. Yosida, K., Funktionalnii analiz (Moskva 1967).



PROPRIETĂȚI ALE MULȚIMII ACCESIBILE ÎN SPAȚII HILBERT

DE

TOPUZU ELENA

1. INTRODUCERE. În tot cuprinsul lucrării X și H vor fi spații Hilbert separabile reale, iar $\mathcal{L}(X, H)$ va desemna spațiul Banach al operatorilor liniari și mărginiți de la X în H . Dacă $H = X$ vom nota $\mathcal{L}(X)$ în loc de $\mathcal{L}(X, X)$, iar în acest caz prin I înțelegem operatorul identic pe X .

Fie $J = [t_0, t_1]$ un interval compact al dreptei reale și Y spațiu Banach arbitrar. Pentru $1 \leq p \leq \infty$ vom nota prin $L^p(J, Y)$ mulțimea tuturor funcțiilor de la J în Y tare măsurabile pe J (identificate modulo mulțimile de măsură Lebesgue nulă) cu proprietatea:

$$\|f\|_p = \left(\int_J \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \|f(t)\| = \inf_{\lambda(M)=0} \sup_{t \in J-M} \|f(t)\| < \infty$$

unde prin $\lambda(M)$ am notat măsura Lebesgue a mulțimii $M \subset J$.

După cum este bine cunoscut $L^p(J, Y)$ înzestrat cu norma $\|\cdot\|_p$ este un spațiu Banach, iar dualul său pentru $1 \leq p < \infty$, poate fi identificat cu $L^q(J, Y^*)$, unde Y^* este dualul lui Y și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dacă Y este spațiu Banach reflexiv, în particular spațiu Hilbert, atunci pentru $1 < p < \infty$, $L^p(J, Y)$ este reflexiv [1].

Vom mai nota $L^p_{loc} = L^p_{loc}(R_+, Y)$ spațiul funcțiilor definite pe $R_+ = [0, \infty)$ cu valori în Y pentru care restricția la orice interval compact $J \subset R_+$ aparține la $L^p(J, Y)$.

Dacă U este o submulțime a lui H , atunci $\mathcal{U}^p$ va desemna mulțimea tuturor funcțiilor $u(\cdot) \in L^p_{loc}(R_+, H)$ cu proprietatea $u(t) \in U$ pentru aproape orice $t \in R_+$. $\mathcal{U}^p(J)$ se definește analog, înlocuind R_+ cu J și $L^p_{loc}(R_+, H)$ cu $L^p(J, H)$.

Pentru $A(\cdot) \in L^1_{loc}(R_+, \mathcal{L}(X))$, $B(\cdot) \in L^1_{loc}(R_+, \mathcal{L}(H, X))$, $U \subset H$ și $\mathcal{U}^p$ ca mai sus putem defini sistemul liniar cu control

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}^p.$$

Notînd $\Phi(t, t_0)$ operatorul Cauchy generat de $A(\cdot)$, adică unica soluție a problemei Cauchy

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

$$\Phi(t_0) = I$$

este bine cunoscut că pentru fiecare $u(\cdot) \in \mathcal{U}^p$ și $x_0 \in X$ fixate, soluția sistemului (Σ) cu proprietatea $x(t_0) = x_0$ este dată de

$$x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds.$$

În acord cu terminologia uzuală, elementele lui X vor fi numite stări, elementele lui $\mathcal{U}^p$ funcții de intrare sau funcții de control, iar $(t, x) \in R \times X$ vor fi numite faze.

Definiția 1. Starea $x_1 \in X$ se zice controlabilă din faza (t_0, x_0) dacă există $t \in R_+$, $t \geq t_0$ și $u(\cdot) \in \mathcal{U}^p$ astfel încît

$$x_1 = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)).$$

În acest caz se mai zice că faza (t, x_1) este controlabilă din faza (t_0, x_0) . Cel mai mic $t \in R_+$ cu această proprietate, dacă există, poartă numele de timp optimal de control al stării x_1 din faza (t_0, x_0) , iar funcția de control corespunzătoare, control optimal.

Problema existenței controlului optimal a fost studiată în literatura de specialitate atât în cazul finit dimensional [3], cât și în cazul spațiilor infinite dimensionale [4], [5].

2. MULȚIME ACCESIBILĂ. Un rol important în studiul unor probleme de control optimal îl joacă așa numita mulțime accesibilă, definită astfel:

Definiția 2. Numim mulțime accesibilă la momentul t , din faza (t_0, x_0) , mulțimea

$$K(t) = K(t, t_0, x_0) = \{x \in X \mid (t, x) \text{ controlabilă din } (t_0, x_0)\}.$$

În [3] se studiază mulțimea $K(t, t_0, x_0)$ în cazul particular, cînd X și H sînt spații finite dimensionale, punîndu-se în evidență principalele proprietăți ale acestei mulțimi. Lucrarea de față își propune să extindă unele rezultate din [3] la cazul în care X și H sînt spații Hilbert separabile.

Principalul rezultat al lucrării este enunțat în teorema care urmează:

Teorema 1. Considerăm sistemul (Σ) cu U mărginită și $U = \bigcap_{i=1}^{i=\infty} H_i$ fiind semispații închise din H . Atunci:

- a) $K(t)$ este secvențial slab compactă în X
- b) $K(t)$ este convexă
- c) $K(t)$ depinde continuu de t .

Observația 1. Fie

$$d(K(t_1), K(t_2)) = \max \left(\sup_{x \in K(t_1)} d(x, K(t_2)), \sup_{x \in K(t_2)} d(x, K(t_1)) \right)$$

unde $d(x, K) = \inf_{x \in K} \|x - y\|$ reprezintă distanța de la x la mulțimea K .

Atunci punctul c) trebuie înțeles astfel:

$$\forall t_1 \geq t_0 \text{ și } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ astfel că } \forall t_2, |t_2 - t_1| \leq \delta \text{ să avem } d(K(t_1), K(t_2)) \leq \varepsilon.$$

Observația 2. Un exemplu de mulțime U este următorul:

$$\text{Fie } H = l^2 = \{x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \xi_i \in \mathbb{R} \text{ și } \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right)^{1/2} = \|x\| < \infty\}.$$

Pentru $x_0 = (\xi_i^0)_{i \in \mathbb{N}} \in l^2$ definim semispațiile

$$[H_{2i-1}] = \{x \in l^2 \mid \xi_i \leq \xi_i^0\} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$[H_{2i}] = \{x \in l^2 \mid -\xi_i \leq 0\}$$

Atunci $U = U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \{x \in l^2 \mid 0 \leq \xi_i \leq \xi_i^0 \text{ } i = 1, 2, \dots\}$ este mărginită deoarece $\forall x \in U, \|x\| \leq \|x_0\|$.

În demonstrația teoremei 1 vom utiliza următoarele două leme:

Lema 1. Fie $U \subset H$ mărginită. Atunci $\mathcal{U}^p(J)$ este slab secvențial relativ compactă în $L^p(J, H)$ $1 < p < \infty$.

Demonstrație $L^p(J, H)$ fiind reflexiv orice mulțime mărginită din acest spațiu este slab secvențial relativ compactă. Rămîne să observăm că pentru $1 < p < \infty$ și $u(\cdot) \in \mathcal{U}^p(J)$

$$\|u(\cdot)\| = \left(\int_J \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} \leq \sup_{u \in U} \|u\| \cdot \lambda(J).$$

Observația 3. Afirmția lemei rămîne adevărată dacă se înlocuiește H cu orice spațiu Banach reflexiv.

Lema 2. Fie $(H_i)_{i \in I}$ o familie cel mult numărabilă de semispații închise ale spațiului Hilbert H și $U = \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.

Atunci $\mathcal{U}^p(J)$ este secvențial slab închisă în $L^p(J, H)$, $1 \leq p < \infty$.

Demonstrație. Fie $\{u_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din $\mathcal{U}^p(J)$ slab convergent la $u(\cdot)$ în $L^p(J, H)$. Pentru fiecare $i \in I$, fie

$$\{x \in H \mid \langle h_i, x \rangle_H + c_i = 0\}$$

hiperplanul care generează semispațiul

$$H_i = \{x \in H \mid \langle h_i, x \rangle_H + c_i < 0\}.$$

Notăm

$$E_i = \{t \in J \mid \langle h_i, u(t) \rangle_H + c_i > 0\}.$$

Deoarece $\{u_n(\cdot)\}_{i \in I}$ converge slab la $u(\cdot)$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \chi_{E_i}(t) [\langle h_i, u_n(t) \rangle_H + c_i] dt = \int_J \chi_{E_i}(t) [\langle h_i, u(t) \rangle_H + c_i] dt.$$

Dacă $\lambda(E_i) > 0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \chi_{E_i}(t) [\langle h_i, u_n(t) \rangle_H + c_i] dt = \int_J \chi_{E_i} [\langle h_i, u(t) \rangle_H + c_i] dt \leq 0.$$

Pe de altă parte,

$$\int_J \chi_{E_i}(t) [\langle h_i, u(t) \rangle_H + c_i] dt > 0.$$

De aici $\lambda(E_i) = 0$, deci

$$\lambda(UE_i) = 0 \text{ și } u(t) \in U \text{ a.p. } t.$$

Consecință. Dacă în ipotezele lemei 2, U este și mărginită, atunci $\mathcal{U}^p(J)$ este secvențial slab compactă în $L^p(J, H)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstrație. Pentru $1 < p < \infty$, din lema 1, $\mathcal{U}^p(J)$ este secvențial slab relativ compactă, iar din lema 2 secvențial slab închisă în $L^p(J, H)$.

Pentru $p=1$, fie $\{u_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n(\cdot) \in \mathcal{U}^p(J) \subset L^p(J, H)$ $1 < p < \infty$ astfel ca $u_n(\cdot)$ să convergă slab la $u(\cdot)$ în $L^p(J, H)$. Atunci pentru orice $f(\cdot) \in L^q(J, H)$, $1 < q < \infty$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \langle u_n(t), f(t) \rangle dt = \int_J \langle u(t), f(t) \rangle dt$$

În particular, pentru orice $f(\cdot) \in L^\infty(J, H) \subset L^q(J, H)$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \langle u_n(t), f(t) \rangle dt = \int_J \langle u(t), f(t) \rangle dt.$$

Pentru $p=\infty$, fie $f(\cdot) \in L^1(J, H)$. Atunci există o funcție continuă g_ε , astfel ca $\int_J \|f(t) - g_\varepsilon(t)\| dt \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Dar $g_\varepsilon \in L^\infty(J, H)$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \langle u_n(t), g_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_J \langle u(t), g_\varepsilon(t) \rangle dt.$$

Atunci :

$$\begin{aligned} \left\| \int_J \langle u_n(t) - u(t), f(t) \rangle dt \right\| &\leq \left\| \int_J \langle u_n(t) - u(t), g_\varepsilon(t) \rangle dt \right\| + \\ &+ \left\| \int_J \langle u_n(t) - u(t), f(t) - g_\varepsilon(t) \rangle dt \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Demonstrația teoremei 1.

a) $K(t)$ este secvențial slab compactă în X .

Fie $x_n(t) = \varnothing(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B(s) u_n(s) ds$. Deoarece $u(\cdot) \in \mathcal{U}^p(J)$ și $\mathcal{U}^p(J)$ este secvențial slab* compactă în $L^\infty(J, H)$, există $u(\cdot) \in \mathcal{U}^p(J)$ și un subșir $u_{n_k}(\cdot) \in \mathcal{U}^p(J)$ astfel ca

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \langle u_{n_k}(s), f(s) \rangle ds = \int_{t_0}^t \langle u(s), f(s) \rangle ds \text{ pentru orice } f(\cdot) \in L^1(J, H).$$

În particular, dacă $x \in X$

$$\int_{t_0}^t \langle u_{n_k}(s), B^*(s) \Phi^*(t, s) x \rangle ds \rightarrow \int_{t_0}^t \langle u(s), B^*(s) \Phi^*(t, s) x \rangle ds$$

adică :

$$\langle x_{n_k}(t), x \rangle \rightarrow \langle x(t), x \rangle \text{ pentru orice } x \in X,$$

deci

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B(s) u(s) ds \in K(t).$$

b) $K(t)$ este convexă în X .

Deoarece U este evident convexă și $\mathcal{U}^p(J)$ este convexă. Operatorul $Tu(\cdot) = \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B(s) u(s) ds$ fiind liniar de la $L^p(J, H)$ în X , $T\mathcal{U}^p(J, H)$ este convexă în X . În sfârșit rămâne să observăm că mulțimea $K(t, t_0, x_0)$ este obținută translatind mulțimea $T\mathcal{U}^p(I)$ prin vectorul $\Phi(t, t_0)x_0$.

c) $K(t)$ depinde continuu de timp.

Fie $t_0 < t_1 < t_2$ și $d(K(t_2), K(t_1)) = \max(\sup_{x_1 \in K(t_1)} d(x_1, K(t_2)), \sup_{x_2 \in K(t_2)} d(x_2, K(t_1)))$ unde

$$x_1 = x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds$$

$$x_2 = x(t_2) = \Phi(t_2, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) u(s) ds = \Phi(t_2, t_1)x_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) u(s) ds.$$

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|\Phi(t_2, t_1)x(t_1) - x(t_1)\| + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) u(s) ds \right\| = \|(\Phi(t_2, t_1) - I)x(t_1)\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) B(s) u(s) ds \right\| \leq \max_{x \in K(t_1)} \|x\| \|\Phi(t_2, t_1) - I\| + M \int_{t_1}^{t_2} \|B(s)\| ds \text{ dacă } |t_2 - t_1| < \delta_1.$$

De aici, pentru fiecare $x_1 \in K(t_1)$

$$d(x_1, K(t_2)) = \inf_{x_2 \in K(t_2)} \|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon \text{ dacă } |t_2 - t_1| < \delta.$$

Analog

$$d(x_2, K(t_1)) = \inf_{x_1 \in K(t_1)} \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon \text{ dacă } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Deci

$$d(K(t_1), K(t_2)) \leq \varepsilon \text{ dacă } |t_2 - t_1| < \delta.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Barbu, V. și Precupanu, Th., Convexitate și optimizare în spații Banach, Ed. Academiei 1977.
2. Hille, E. și Phillips, R. S., Functional analysis and semi-groups Amer. Mat. Soc. Providence 1957.
3. Lee, E. B. și Markus L., Foundations of optimal control theory, Wiley, New-York, 1967.
4. Balakrishnan, A. V., Introduction to optimization theory in a Hilbert space, Lectures Notes, Springer Verlag, Berlin 1971.
5. Fattorini, H. O., Time optimal control of solutions of operational differential equations, J. Siam Control, Ser A, vol. 2, No. 1, p. 54-59.

PROPERTIES OF ACCESIBLE SET IN HILBERT SPACES

ABSTRACT

The aim of this paper is to obtain some results concerned properties of accesible set of the linear control systems in Hilbert spaces.

A study of this properties can be found in [3] for finite dimensional spaces.

OPERATORI LINIARI CONSTRUIȚI PE PRODUSE CARTEZIENE DE SPAȚII EUCLIDIENE

DE

S. Poenaru

Fie U un spațiu unitar real sau complex, de dimensiune infinită și normat cu norma indusă de produsul său scalar, notat prin $\langle ; \rangle$. Presupunem că există în acest spațiu un șir infinit de vectori nenuli, ortonormat, față de care spațiul U să fie închis, adică seria Fourier a oricărui vector $a \in U$ să fie convergentă în normă către însuși vectorul a .

Notînd acest șir: $(U_n)_{n \in N}$; $\langle u_i ; u_k \rangle = \delta_i^j$, δ_i^j fiind simbolul lui Kroneker, putem privi operația de construcție a seriei Fourier, în raport cu acest șir, atașată vectorului a :

$$a \sim \alpha^n U_n ; n \in N ; \alpha^n = \langle a ; u_n \rangle ,$$

ca un operator liniar ce aplică spațiul U pe el însuși și care în ipotezele făcute asupra acestui spațiu, operatorul L se reduce la operatorul identic, avînd toți vectorii spațiului ca vectori proprii și spectrul redus la $\{1\}$, adică

$$La = a, \forall a \in U.$$

I. Vom considera acum, un nou spațiu vectorial $\mathfrak{V} = U^k$, adică produsul cartezian a lui U prin el însuși, și vom nota vectorii săi $a^* \in \mathfrak{V}$ prin matrici coloană:

$$a^* = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t ; a_i \in U ; (k = \text{fix})$$

Notăția: $0^* = (0, 0, \dots, 0)^t$ revine vectorului nul din $\mathfrak{V}$.

Prin analogie cu operatorul L definit mai sus, vom defini și în spațiul $\mathfrak{V}$, un operator L_1 , în felul următor:

1) Îl vom înzestra pe $\mathfrak{V}$ cu un „produs scalar-matricial” notat și definit astfel:

$$\ll a^* ; b^* \gg = (a_1, a_2, \dots, a_k)^t (b_1, b_2, \dots, b_n) = \langle a_i ; b_j \rangle_1^k$$

adică se imită înmulțirea definită pentru matricile scalare, numai că produsele dintre elementele matriciale se înlocuiesc prin produse scalare din U . Este de observat faptul că dacă cei doi vectori sînt egali, matricea rezultată va fi matricea Gramm, a componentelor vectoriale a_i ale vectorului a^* , iar ortogonalitatea:

$$\ll a^* ; b^* \gg = O_k \Leftrightarrow \langle a_i ; b_j \rangle = 0 ; i, j = \overline{1, k}$$

unde prin O_k s-a notat matricea scalară nulă de ordinul k . Vom avea $\ll a^* ; a^* \gg = O_k \Leftrightarrow a^* = O^*$ și celelalte proprietăți analoage produsului scalar din U , sînt verificate.

2) Vom forma în $\mathfrak{V}$, un șir „ortonormat” $(V_n^*)_{n \in N}$, ca seturi consecutive de vectori distincți, ai șirului ortonormat (U_n) din U , adică

$$V_n^* = (u_{nk-k+1}, \dots, u_{nk})^t.$$

Se verifică imediat „ortonormalitatea” șirului V_n^* , avînd:

$$\ll V_i^* ; V_j^* \gg = \Delta_i^j$$

unde prin Δ_i^j înțelegem un simbol Kroneker generalizat, care coincide cu matricea nulă O_k , dacă $i \neq j$ și cu matricea unitate I , dacă $i = j$.

3) Vom ataşa fiecărui vector $a^* \in \mathfrak{V}$ o „serie Fourier” matricială

$$a^* \sim A^n V_n^*; n \in N; A^n = \ll a^*; v_n^* \gg = \|\alpha_i^{(n-1)k+j}\|_1^k,$$

matrice care conţine pe linii coeficienţii Fourier din setul al n -lea, pentru componenta vectorială, de acelaşi rang cu linia, din vectorul a^* . Rezultă :

$$a^* \sim \|\alpha_i^{(n-1)k-j}\|_1^k \cdot \|U_{(n-1)k-j}\|^t = \left\| \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_i^s U_s \right\|_{i=1}^k;$$

ultima matrice fiind o matrice coloană, avînd ca elemente seriile corespunzătoare ale componentelor vectoriale ale vectorului a^* .

4) Definind convergenţa unei astfel de „serie Fourier” în $\mathfrak{V}$ într-un fel oarecare σ , vom defini operatorul $L_1\sigma$ prin : $L_1\sigma a^* = a_0^*$, a_0^* fiind vectorul către care σ — converge seria ataşată a lui a^* , dacă există a_0^* şi $\in \mathfrak{V}$. Observăm că dacă luăm convergenţa $\sigma = \sigma_0 =$ convergenţa în normă matricială, indusă de „produsul” $\ll ; \gg$ avem :

$$\ll a^* - s_n^*; a^* - s_n^* \gg \approx 0_k \Leftrightarrow s_n^* \approx a^*,$$

unde s_n^* este matricea coloană cu elemente sumele parţiale ale seriilor ataşate vectorilor de pe coloana lui a^* , ceea ce ne arată că vom obţine convergenţa seriei ataşate lui a^* , faţă de „norma” $\ll ; \gg$, dacă şi numai dacă are loc convergenţa seriei ataşate fiecărui vector componentă a_i a lui a^* , către însuşi a_i faţă de norma $< ; >$, ceea ce are în cazul σ_0 , în baza ipotezelor făcute la început pentru U .

Operatorul $L_1\sigma$ este, deci operaţia de construire simultană a seriilor Fourier, a cite unui set de vectori (k vectori, $k = \text{fix}$) din U , faţă de şirul (U_n), lucru care are uneori avantajul unei economii de timp, de scriere mai concentrată a rezultatelor şi a faptului că se poate opri aproximarea tuturor vectorilor prin sume parţiale cu acelaşi număr de termeni, multiplu de k .

II. Un alt mod de construcţie, printre altele posibile, de operatori generalizaţi, îl vom pune în evidenţă, prin următoarea construcţie : Vom considera produsul cartezian U^{k^2} , cu elementele vectoriale date sub formă de matrici pătrate de ordinul k cu elemente vectori $a_{ij} \in U$:

$$M \in U^{k^2} \Leftrightarrow M = \|\alpha_i^j\|_{i,j=1}^k.$$

La fel vom defini un „produs scalar-matricial” notat $(:)$ între vectorii-matrici din U^{k^2} , prin :

$$(M; N) = MoN = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^k; \forall M, N \in U^{k^2}, \text{ unde : } \gamma_{ij} = \langle a_i^k; b_k^j \rangle; i, j = 1; k,$$

adică şi aici se imită operaţia de înmulţire a matricilor, înlocuindu-se produsele obişnuite dintre scalari, cu produse scalare de vectori din U .

Construcţia şirului matricial ortogonal din U^{k^2} se va face tot cu ajutorul seturilor de cite k vectori din şirul (u_n), formînd dintr-un astfel de set toate liniile termenului general-matricial, prin permutări circulare, adică.

$$M_n = \left\| \begin{array}{cccc} U_{nk-k+1} & U_{nk-k+2} & \dots & U_{nk-1} & U_{nk} \\ U_{nk-k+2} & U_{nk-k+3} & \dots & U_{nk} & U_{nk-k+1} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ U_{nk} & U_{nk-k+1} & \dots & U_{nk-2} & U_{nk-1} \end{array} \right\|.$$

Se observă imediat că toate matricile şirului $(M_n)_n \in N$ sînt simetrice, iar acest şir este ortogonal :

$$(M_m; M_p) = \begin{cases} O_k; m \neq p \\ KI_k; m = p \end{cases}$$

unde, aşa cum s-a specificat mai sus O_k şi I_k sînt respectiv matricea nulă şi matricea unitate de ordinul k .

Operatorul L_2 , începem a-l construi prin ataşarea fiecărei matrici $M \in U^{k^2}$, a unei „serii Fourier” în raport cu şirul (M_n) :

$$M \sim \Gamma^n M_n; \Gamma^n = \frac{1}{k} (M; M_n),$$

unde prin produsul $\Gamma^n M_n$, pentru un n oarecare fix, înţelegem un produs obţinut analog cu înmulţirea obişnuită a matricilor, termenii produsului fiind combinaţii liniare ai vectorilor de pe coloanele lui M_n cu scalarii de pe liniile lui Γ^n .

Înzestrind spațiul U^{k^2} cu o convergență oarecare τ și dacă seria $\Gamma^n M_n$ este τ -convergentă spre un anumit vector $M_0 \in U^{k^2}$, vom defini operatorul $L_{2\tau}$, punind

$$L_{2\tau}(M) = M_0$$

acest operator fiind definit numai pentru acei vectori M , pentru care „seria Fourier-matricială” atașată lui M , în raport cu șirul (M_n) va fi τ -convergentă. Avem de observat că elementele matricilor-coeficienți Γ^n au elemente scalare ce se calculează din coeficienții Fourier ai vectorilor a_{ij} , care sint elementele lui M , ca medii aritmetice ale acestora în diverse combinații, iar convergența seriei Fourier a fiecărui vector a_{ij} în normă către însuși acest vector, nu asigură convergența element cu element a seriei $\Gamma^n M_n$ către însăși matricea M . Acest lucru se întâmplă numai în cazuri particulare de matrici M și atunci M va fi un vector propriu pentru operatorul L_2 cu valoare proprie 1. Construcția unui operator de genul lui L_2 , s-ar putea să aibă aplicații, în sensul definirii unei metode de sumare „în sistem” a k^2 serii Fourier, cu aplicații în teoria aproximării.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Creangă, C. Reischer, Algebră liniară Ed. didactică și pedagogică București 1970.
2. Alexandru Ghica., Analiza funcțională Ed. Academiei R.S.R. 1967.
3. Romulus Cristescu., Analiză funcțională Ed. didactică și pedagogică București 1965.

LINEARE OPERATOREN DEFINIERT AUF KARTESISCHE PRODUKTE VON EUKLIDISCHEN RÄUMEN

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie man ein Operator L_1 erhält, der gleichzeitig für k Vektoren ($k = \text{fix}$) Fourier-Reihen erzeugt, die aus einem reellen oder komplexen unitären Raum U sind, bezüglich einer ortonormierten Folge (U_n) aus U .

Im zweiten Teil wird der Raum U^{k^2} mit den Elementen M_k augenommen; M_k sind quadratische Matrizen der Ordnung k , deren Elemente $a_{ij} \in U$ Vektoren sind.

Der Raum U^{k^2} wird mit einer beliebigen Konvergenz τ ausgestattet. Ist die Reihe $\Gamma^n M_n$ gegen $M_0 \in U^{k^2}$, τ -konvergent, dann definieren wir den Operator $L_{2\tau}(M) = M_0$. Die Bildung des Operators L_2 führt uns zu einer Summierungsmethode für ein „System“ von k^2 Fourier-Reihen, die in der Approximationstheorie eine Anwendung findet.

ON SOME FUNDAMENTAL INTEGRAL INEQUALITIES WITH APPLICATIONS

BY

B. G. PACHPATTE

Department of Mathematics, Deogiri College Aurangabad (Maharashtra) India

1. Introduction. In 1919, T.H. Gronwall [2] established a remarkable inequality which has received a considerable attention in the literature. After the discovery of the integral inequality resulting from Gronwall [2], a number of mathematicians have shown their considerable interest to generalize the original form of this inequality due to its importance in the study of differential and integral equations. J. Chandra and B. A. Fleishman's paper [1] and the recent monograph by V. Lakshmikantham and S. Leela [5] summarizes many results by various authors on the generalizations of the Gronwall's inequality and their applications. Recently, in a series of papers [7]—[16] the present author has established several new integral inequalities which can be used as a tool in the theory of differential and integral equations of the more general type. Our objective here is to present a number of theorems concerning the new integral inequalities which can be used in applications as handy tools.

2. Fundamental Inequalities. In this section we establish some fundamental integral inequalities which play a vital role in the study of stability, boundedness and asymptotic properties of differential and integral equations.

THEOREM 1. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on $I=[0, \infty)$, for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x^2(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(x(s) + \int_0^s c(\tau) x(\tau) d\tau \right) ds, \quad (1)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) E(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t a(s) \exp \left(\int_0^s b(\tau) E(\tau) d\tau \right) ds}, \quad (2)$$

for all $t \in I$, where

$$E(t) = \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t c(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s)] \exp \left(\int_0^s c(\tau) d\tau \right) ds}, \quad t \in I. \quad (3)$$

Proof. Define a function $m(t)$ by the right member of (1). Then

$$m'(t) = a(t) x^2(t) + b(t) x(t) \left(x(t) + \int_0^t c(\tau) x(\tau) d\tau \right), \quad m(0) = x_0,$$

which in view of (1) implies

$$m'(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) m(t) \left(m(t) + \int_0^t c(\tau) m(\tau) d\tau \right). \quad (4)$$

If we put

$$v(t) = m(t) + \int_0^t c(\tau) m(\tau) d\tau, \quad v(0) = m(0) = x_0, \quad (5)$$

then it follows by differentiating (5) and using the facts that $m'(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) m(t) v(t)$ and $m(t) \leq v(t)$ from (4) and (5) we see that the inequality

$$v'(t) \leq [a(t) + b(t)] v^2(t) + c(t) v(t), \quad (6)$$

is satisfied. The inequality (6) can be written as

$$v^{-2}(t) v'(t) - c(t) v^{-1}(t) \leq [a(t) + b(t)]. \quad (7)$$

Put $v^{-1}(t) = n(t)$, so that $-v^{-2}(t) v'(t) = n'(t)$, and $n(0) = x_0^{-1}$, then we have

$$n'(t) + c(t) n(t) \geq -[a(t) + b(t)], \quad (8)$$

which implies the estimation for $n(t)$ such that

$$n(t) \exp \left(\int_0^t c(s) ds \right) \geq n(0) - \int_0^t [a(s) + b(s)] \exp \left(\int_0^s c(\tau) d\tau \right) ds.$$

Now, substituting $n(t) = v^{-1}(t)$ in the above inequality, we have

$$v(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t c(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s)] \exp \left(\int_0^s c(\tau) d\tau \right) ds} = E(t).$$

Substituting this value of $v(t)$ in (4) we have

$$m'(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) E(t) m(t),$$

which by following the similar argument as above implies the estimate for $m(t)$ such that

$$m(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) E(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t a(s) \exp \left(\int_0^s b(\tau) E(\tau) d\tau \right) ds}.$$

Now, substituting the value of $m(t)$ in (1) we obtain the desired bound in (2).

An interesting observation about the integral inequality established in Theorem 1 is that, when $a(t) = 0$, we arrive at the another new integral inequality which can be used in some applications. We also note that, in the special case when $b(t) = 0$, Theorem 1 reduces to the slightly different version of the Gronwall's inequality [2] which may be convenient in certain situations.

Another interesting and useful integral inequality is embodied in the following theorem.

THEOREM 2. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x^2(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(x(s) + \int_0^s c(\tau) x^2(\tau) d\tau \right) ds, \quad (9)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) E_0(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t a(s) \exp \left(\int_0^s b(\tau) E_0(\tau) d\tau \right) ds}, \quad (10)$$

holds for all $t \in I$, where

$$E_0(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s) + c(s)] ds}, \quad t \in I. \quad (11)$$

The proof of this theorem follows by the similar argument as in the proof of Theorem 1 with suitable modifications. We omit the details.

We next establish slightly different versions of Theorem 1 and 2 which can be used in some applications.

THEOREM 3. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x^2(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(\int_0^s c(\tau) x(\tau) d\tau \right) ds, \quad (12)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) E_1(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s)] \exp \left(\int_0^s b(\tau) E_1(\tau) d\tau \right) ds}, \quad (13)$$

holds for all $t \in I$, where

$$E_1(t) = \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t c(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s)] \exp \left(\int_0^s c(\tau) d\tau \right) ds}, \quad t \in I. \quad (14)$$

Proof. Define a function $m(t)$ by the right member of (12). Then

$$m'(t) = a(t) x^2(t) + b(t) x(t) \left(\int_0^t c(\tau) x(\tau) d\tau \right), \quad m(0) = x_0,$$

which in view of (12) implies

$$m'(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) m(t) \left(\int_0^t c(\tau) m(\tau) d\tau \right).$$

Adding $b(t) m^2(t)$ to both sides of the above inequality we have

$$m'(t) + b(t) m^2(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) m(t) \left[m(t) + \int_0^t c(\tau) m(\tau) d\tau \right]. \quad (15)$$

If we put

$$v(t) = m(t) + \int_0^t c(\tau) m(\tau) d\tau, \quad v(0) = m(0) = x_0, \quad (16)$$

then it follows by differentiating (16) and using the facts that $m'(t) \leq a(t) m^2(t) + b(t) m(t) v(t)$ and $m(t) \leq v(t)$ from (15) and (16) we see that the inequality

$$v'(t) \leq [a(t) + b(t)] v^2(t) + c(t) v(t),$$

is satisfied. The rest of the proof follows by the similar argument as in the proof of Theorem 1 with suitable modifications, and hence we omit the details.

THEOREM 4. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x^2(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(\int_0^s c(\tau) x^2(\tau) d\tau \right) ds, \quad (17)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) E_2(s) ds \right)}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) - b(s)] \exp \left(\int_0^s b(\tau) E_2(\tau) d\tau \right) ds}, \quad (18)$$

holds for all $t \in I$, where

$$E_2(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \int_0^t [a(s) + b(s) + c(s)] ds}, \quad t \in I. \quad (19)$$

The proof of this theorem follows by closely looking at the proof of Theorem 3 and 1, and we leave the details to the reader.

It is interesting to note that Theorems 2–4 in the special case when $a(t) = 0$ are new to the literature. However, when $b(t) = 0$ the results obtained in this section reduces to a slightly different form of the well-known Gronwall's inequality [2].

3. Generalizations of Gronwall's Inequality. In this section we wish to establish some interesting and new generalizations of the well-known Gronwall's inequality [2] which can be used in applications as handy tools. A useful general version of Gronwall's inequality may be stated as follows.

THEOREM 5. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x(s) ds + \int_0^t b(s) x^\alpha(s) \left(x(s) + \int_0^s c(\tau) x^{\alpha+1}(\tau) d\tau \right) ds, \quad (20)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant and $0 < \alpha < 1$. Then

$$x(t) \leq \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) \left[x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t b(s) Q(s) \exp \left(-(1-\alpha) \int_0^s a(\tau) d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (21)$$

for all $t \in I$, where

$$Q(t) = \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right)}{\left[1 - \alpha x_0^\alpha \int_0^t [b(s) + c(s)] \exp \left(\alpha \int_0^s a(\tau) d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \in I. \quad (22)$$

Proof. Define a function $m(t)$ by the right member of (20). Then

$$m'(t) = a(t) x(t) + b(t) x^\alpha(t) \left(x(t) + \int_0^t c(\tau) x^{\alpha+1}(\tau) d\tau \right), \quad m(0) = x_0,$$

which in view of (1) implies

$$m'(t) \leq a(t) m(t) + b(t) m^a(t) \left(m(t) + \int_0^t c(\tau) m^{a+1}(\tau) d\tau \right), \quad (23)$$

If we put

$$v(t) = m(t) + \int_0^t c(\tau) m^{a+1}(\tau) d\tau, \quad v(0) = m(0) = x_0, \quad (24)$$

then it follows by differentiating (24) and using the facts that $m'(t) \leq a(t) m(t) + b(t) m^a(t) v(t)$ and $m(t) \leq v(t)$ from (23) and (24) we see that the inequality

$$v'(t) \leq a(t) v(t) + [b(t) + c(t)] v^{a+1}(t), \quad (25)$$

is satisfied, which by following the similar argument as in the proof of Theorem 1 implies the estimate for $v(t)$ such that

$$v(t) \leq \frac{x_0 \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right)}{\left[1 - \alpha x_0^\alpha \int_0^t [b(s) + c(s)] \exp \left(\alpha \int_0^s a(\tau) d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{\alpha}}} = Q(t).$$

Substituting this value of $v(t)$ in (23) we have

$$m'(t) \leq a(t) m(t) + b(t) Q(t) m^a(t),$$

which implies the estimation for $m(t)$ such that

$$m(t) \leq \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) \left[x_0^{1-a} + (1-a) \int_0^t b(s) Q(s) \exp \left(-(1-a) \int_0^s a(\tau) d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{1-a}}.$$

Now, substituting the value of $m(t)$ in (20) we obtain the desired bound in (21).

By setting $a(t) = 0$, in the above inequality, we arrive at the another interesting inequality which can be used in some applications. We also note that, in the special case when $b(t) = 0$, Theorem 5 reduces to the well-known integral inequality resulting from Gronwall [2].

We next establish two more generalizations of the Gronwall's inequality which can be used in certain situations.

THEOREM 6. Let $x(t)$, $a(t)$, $v(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(x(s) + \int_0^s c(\tau) x^2(\tau) d\tau \right) ds, \quad (26)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq x_0 \exp \left(\int_0^t \left[a(s) + b(s) \left(\frac{x_0 \exp \left(\int_0^s a(\tau) d\tau \right)}{1 - x_0 \int_0^s [b(\tau) + c(\tau)] \exp \left(\int_0^\tau a(k) dk \right) d\tau} \right) \right] ds \right), \quad (27)$$

for all $t \in I$.

THEOREM 7. Let $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, and $c(t)$ be real-valued nonnegative continuous functions defined on I , for which the inequality

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t a(s) x(s) ds + \int_0^t b(s) x(s) \left(x^2(s) + \int_0^s c(\tau) x^2(\tau) d\tau \right) ds, \quad (28)$$

holds for all $t \in I$, where x_0 is a positive constant. Then

$$x(t) \leq x_0 \exp \left(\int_0^t \left[a(s) + b(s) \left(\frac{x_0^2 \exp \left(\int_0^s [2a(\tau) + c(\tau)] d\tau \right)}{1 - 2x_0^2 \int_0^s b(\tau) \exp \left(\int_0^\tau 2a(k) + c(k) dk \right) d\tau} \right) \right] ds \right), \quad (29)$$

for all $t \in I$.

The proofs of Theorem 6 and 7 follows by closely looking at the proof of Theorem 5 with suitable modifications, and we leave the details to the reader.

We note that in the special case when $b(t) = 0$, Theorem 6 and 7 reduces to the Gronwall's inequality given in [2]. In the special case when $a(t) = 0$, our results in Theorems 5–7 seems to be new to the literature.

4. Some Applications. In this section we present some interesting applications of some of the inequalities established in section 3. There are many possible applications of the integral inequalities established in this paper, but those presented here are sufficient to convey the importance of our result. Here we are interested in the boundedness and asymptotic behavior of the solutions of nonlinear integrodifferential equation

$$x'(t) - x'(0) + \int_0^t f(s) x(s) ds + \int_0^t g(s) x^\alpha(s) H(s, x(s), \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau) ds = 0, \quad (30)$$

where $f, g \in C[0, \infty)$, $k \in C[I \times I \times R, R]$, $H \in C[I \times R \times R, R]$ and $0 < \alpha < 1$, in which R denotes the set of real numbers. The equation (30) is equivalent to the integral equation

$$\begin{aligned} & [x(t) - x(0) - tx'(0) + \int_0^t (t-s) f(s) x(s) ds + \\ & + \int_0^t (t-s) g(s) x^\alpha(s) H(s, x(s), \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau) ds = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

The equation (30) is also equivalent to the integrodifferential equation

$$[x''(t) + f(t) x(t) + g(t) x^\alpha(t) H(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s)) ds) = 0. \quad (32)$$

Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of different forms of (30)–(32) have been previously obtained by Hastings [3], Muldonwney and Wong [4], Pachpatte [6], Waltman [17] and others. In Theorem 8 and 9 we establish our results on the boundedness and asymptotic behavior of the solutions (30)–(32). To our knowledge such estimates have not been constructed before in the literature.

THEOREM 8. Suppose that the functions H and k in (30) satisfy the hypotheses

$$|H(t, x, u)| \leq N[|x| + |u|], \quad t \in I, \quad (33)$$

$$|k(t, s, x)| \leq h(s) |x|^{\alpha+1}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (34)$$

where $N > 0$ is a constant, $0 < \alpha < 1$, and $h(t)$ is a real-valued nonnegative continuous function defined on I . Then any solution of (30) may be continued throughout $[0, T_1)$ and satisfies

$$|x(t)| \leq \exp \left(\int_0^t (t-s) |f(s)| ds \right) \left[M^{1-\alpha}(t) + (1-\alpha) \int_0^t (t-s) N |g(s)| A(s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left(-(1-\alpha) \int_0^s (s-\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (35)$$

for all $t \in [0, T_1)$, where

$$M(t) = |x(0)| + \int_0^t s |x'(0)| ds, \quad t \in [0, T_1), \quad (36)$$

$$A(t) = \frac{M(t) \exp \left(\int_0^t (t-s) |f(s)| ds \right)}{\left[1 - \alpha M^\alpha(t) \int_0^t [(t-s) N |g(s)| + h(s)] \exp \left(\alpha \int_0^s (s-\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \in [0, T_1). \quad (37)$$

Proof. Equation (30) is equivalent to the integral equation (31). Using (31), (33), and (34) we have

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t s |x'(0)| ds + \int_0^t (t-s) |f(s)| |x(s)| ds + \\ + \int_0^t (t-s) N |g(s)| |x(s)|^\alpha \left[|x(s)| + \int_0^s h(\tau) |x(\tau)|^{\alpha+1} d\tau \right] ds \leq \\ \leq |x(0)| + \int_0^T s |x'(0)| ds + \int_0^t (T-s) |f(s)| |x(s)| ds + \\ + \int_0^t (T-s) N |g(s)| |x(s)|^\alpha \left[|x(s)| + \int_0^s h(\tau) |x(\tau)|^{\alpha+1} d\tau \right] ds,$$

for all $t \in [0, T)$ where $[0, T)$ is any interval on which $x(t)$ exists. Hence by Theorem 5, we have.

$$|x(t)| \leq \exp \left(\int_0^t (T-s) |f(s)| ds \right) \left[M^{1-\alpha}(T) + (1-\alpha) \int_0^t (T-s) N |g(s)| A(s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left(-(1-\alpha) \int_0^s (T-\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (38)$$

for $t \in [0, T)$ provided that $0 \leq T \leq T_1$, where M and A are as defined in (36) and (37). If $T \in [0, T_1)$, then (31) and (38) imply that $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = x(T)$ exists, (35) holds at $t = T$ and $x(t)$ may be continued to the right of T . Since T is arbitrary in $[0, T_1)$, we conclude that $x(t)$ may be continued throughout $[0, T_1)$ and it also satisfies (35) for all $t \geq 0$.

To this end, we establish the following theorem on the asymptotic bound in the solutions of equation (32).

THEOREM 9. Suppose that the functions H and k in (32) satisfy the hypotheses

$$|H(t, x, u)| \leq N[|x| + |u|], \quad t \in I, \quad (39)$$

$$|k(t, s, x)| \leq (1+t) h(s) |x|^{\alpha+1}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (40)$$

where $N > 0$ is a constant, $0 < \alpha < 1$, and $h(t)$ is a real-valued nonnegative continuous function defined on I . Then any solution $x(t)$ of (32) satisfies

$$x(t) = 0 \left[\exp \left(\int_0^t (1+s) |f(s)| ds \right) \left\{ c^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t N (1+s)^{\alpha+1} |g(s)| B(s) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \exp \left(-(1-\alpha) \int_0^s (1+\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \right], \quad (41)$$

as $t \rightarrow \infty$ where $c = |c_1 + c_2|$ is a constant, and

$$B(t) = \frac{c \exp \left(\int_0^t (1+s) |f(s)| ds \right)}{\left[1 - \alpha c^\alpha \int_0^t (1+s)^{\alpha+1} [N |g(s)| + h(s)] \exp \left(\alpha \int_0^s (1+\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (42)$$

Proof. Integrating (32) twice from 0 to t we obtain

$$x(t) = c_1 + c_2 t - \int_0^t (t-s) \left[f(s) x(s) + g(s) x^\alpha(s) H(s, x(s), \int_0^s k(s, \tau, x(\tau)) d\tau) \right] ds, \quad (43)$$

where c_1 and c_2 are positive constants. Taking absolute values on both sides of (43) and using (39) and (40) we set for all $t \geq 0$

$$|x(t)| \leq (1+t) (|c_1 + c_2|) + (1+t) \left[\int_0^t |f(s)| |x(s)| ds + \right. \\ \left. + \int_0^t |g(s)| N |x(s)|^\alpha \left[|x(s)| + \int_0^s (1+\tau) h(\tau) |x(\tau)|^{\alpha+1} d\tau \right] ds \right].$$

The above inequality can be written as

$$u(t) \leq c + \int_0^t (1+s) |f(s)| u(s) ds + \int_0^t N (1+s)^{\alpha+1} |g(s)| u^\alpha(s) \cdot \\ \cdot \left[u(s) + \int_0^s (1+\tau)^{\alpha+1} h(\tau) u^{\alpha+1}(\tau) d\tau \right] ds,$$

for all $t \geq 0$, where $u(t) = \frac{x(t)}{(1+t)}$. Now, an application of Theorem 5 yields

$$u(t) \leq \left[\exp \left(\int_0^t (1+s) |f(s)| ds \right) \left\{ c^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t N (1+s)^{\alpha+1} |g(s)| B_u(s) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \exp \left(-(1-\alpha) \int_0^s (1+\tau) |f(\tau)| d\tau \right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]. \quad (44)$$

The conclusion (41) now follows from (44), and the proof of the theorem is complete.

REFERENCES

1. J. Chandra and B. A. Fleishman, On a generalization of the Gronwall — Bellman lemma in partially ordered Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 31 (1970), 668—681.
2. T. H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Am. Math.* 20 (1919), 292—296.
3. S. P. Hastings, On the asymptotic growth of solutions to a nonlinear equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), 40—47.
4. J. S. Muldowney and J. S. W. Wong, Bounds for solutions of nonlinear integrodifferential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 23 (1968), 487—499.
5. V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and integral inequalities: Theory and Applications, Vol. I Academic Press, New York, 1969.
6. B. G. Pachpatte, Boundedness and asymptotic behavior of solutions of second order integrodifferential equations, *J. Math. Physical Sci.* 9 (1975), 171—175.
7. B. G. Pachpatte, A note on Gronwall — Bellman inequality, *J. Math. Anal. Appl.* 44 (1973), 758—762.
8. B. G. Pachpatte, A note on integral inequalities of the Bellman - Bihari type, *J. Math. Anal. Appl.* 49 (1975), 295—301.
9. B. G. Pachpatte, On some integral inequalities similar to Bellman - Bihari inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 49 (1975), 794—802.
10. B. G. Pachpatte, On some generalizations of Bellman's Lemma, *J. Math. Anal. Appl.* 51 (1975) 141—150.
11. B. G. Pachpatte, An integral inequality similar to Bellman - Bihari inequality, *Bull. Soc. Math. Greece* 15 (1974), 7—12.
12. B. G. Pachpatte, Integral Inequalities of the Gronwall - Bellman] type and their applications, *J. Math. Physical Sci.* 8 (1974), 309—318.
13. B. G. Pachpatte, A note on an integral inequality, *J. Math. Physical Sci.* 9 (1975), 11—14.
14. B. G. Pachpatte, On an integral inequality of Gronwall - Bellman, *J. Math. Physical Sci.* 9 (1975), 405—416.
15. B. G. Pachpatte, On some new integral inequalities for differential and integral equations, *J. Math. Physical Sci.* 10 (1976), 101—116.
16. B. G. Pachpatte, On some nonlinear generalizations of Gronwall's inequality, *Proc. Indian Acad. Sci.* 84 (A) (1976), 1—9.
17. P. Waltman, Some properties of solutions of $u'' + a(t)f(u) = 0$, *Monatsh. Math.* 67 (1963), 50—54.

ON THE DEFORMATIONS OF FLAT ANALYTIC HOMOMORPHISMS

BY

CSABA HATVANY

In [5] Schuster studied the deformations of analytic algebras and proves that an analytic algebra is rigid if it is tangentially rigid. Kramm [3] generalized this study to analytic homomorphisms, i.e., to morphisms of analytic algebras. However, the deformation functor $D(-)$ defined by Kramm do not satisfy the Schlessinger-conditions [4] even if f is flat and finite.

In this note we define a deformation theory for flat analytic homomorphisms, such that the corresponding deformation functor $\text{Def}(f, -)$ satisfies the Schlessinger-conditions provided that f is artinian, i.e., f is flat and finite with artinian domain. If the base of f is the base field, then we obtain the absolute case of Schuster. For an analytic homomorphism f we establish the following results generalizing the absolute case:

- 1) if f is artinian, then f has a versal formal deformation;
- 2) if f is smooth, then it is rigidifiable;
- 3) if f is flat with artinian base, then f is rigid if and only if it is tangentially rigid;
- 4) if f is smooth with artinian base, then it is rigid.

§ 1. Base changes and deformations of homomorphisms

We consider a field k of characteristic 0, complete in the topology induced by a non-trivial valuation. Let Anal_k be the category of the analytic algebras and homomorphisms. The analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ determines on B an A -algebra structure and we shall say that B is an analytic A -algebra and we denote by $A\text{-Anal}_k$ the category of analytic A -algebras.

(1.1) **Definition.** A *base change for the analytic homomorphism* $f: A \rightarrow B$ is a pair $\mathcal{A}' := (\alpha', \beta')$ of analytic homomorphisms where $\alpha': A' \rightarrow A$ is an analytic epimorphism with a nilpotent kernel if $A \neq k$ or with $\ker(\alpha') = m_A$, if $A = k$, and where $\beta': A \rightarrow A'$ is a right inverse of α' in Anal_k . A *homomorphism of base change* $\varphi: \mathcal{A}' = (\alpha', \beta') \rightarrow \mathcal{A}'' = (\alpha'', \beta'')$ is an analytic homomorphism $\varphi: A' \rightarrow A''$ satisfying $\varphi\beta' = \beta''$ and $\alpha''\varphi = \alpha'$.

We denote by $\mathcal{C}_f$ the category of the base changes for the analytic homomorphism f . A remarkable base change is $\mathcal{A} \oplus M$, given by the canonic homomorphisms $A \rightarrow A \oplus \oplus M \rightarrow A$, where M is an analytic A -module. In particular, we have the tangential base change $\mathcal{A} \oplus A =: \mathcal{A}[\varepsilon]$.

If f is an analytic homomorphism with artinian base, we can define the category $\hat{\mathcal{C}}_f$ of the formal base changes for f .

(1.2) **Definition.** A *formal base change for the analytic homomorphism* $f: A \rightarrow B$ with artinian base is a pair $\hat{\mathcal{A}}' := (\hat{\alpha}', \hat{\beta}')$ of k -algebra homomorphisms where $\hat{\alpha}': \hat{A}' \rightarrow \hat{A}$

is an epimorphism from the complete noetherian local k -algebra $\hat{A}'$, and where $\hat{\beta}: A \rightarrow \hat{A}'$ is a right inverse of $\hat{\alpha}'$.

The category $\mathcal{C}_f$ is a full subcategory of $\hat{\mathcal{C}}_f$.

(1.3) **Definition.** A deformation of the flat analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ by the base change $\mathcal{A}' = (\alpha', \beta') \in \mathcal{C}_f$ is a pair $\mathbf{D} = (f', i)$ where $f': A' \rightarrow B'$ is a flat analytic homomorphism and $i: B' \hat{\otimes}_A A$ is an isomorphism of analytic A -algebras. A formal deformation of the analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ with artinian base, by the formal base change $\hat{\mathcal{A}}' \in \hat{\mathcal{C}}_f$ is a representative $\hat{\mathbf{D}}$ for an element of the equivalence class $\mathbf{Def}(f, \hat{\mathcal{A}}')$.

In the definition above $\mathbf{Def}(f, -): \hat{\mathcal{C}}_f \rightarrow \mathcal{Set}$ is the formal deformation functor of f , obtained extending the (analytic) deformation functor $\mathbf{Def}(f, -): \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{Set}$ of f , by the formula $\mathbf{Def}(f, \hat{\mathcal{A}}') := \text{pro} \lim \mathbf{Def}(f, \hat{\mathcal{A}}'_n)$, where $\hat{\mathcal{A}}'_n := \hat{\mathcal{A}}' / (\ker \hat{\alpha}')^{n+1}$. To every deformation $\mathbf{D}$ one can associate a formal deformation $\tilde{\mathbf{D}}$.

The induced deformation $\mathbf{D}/\mathcal{A}''$ of a deformation $\mathbf{D}$ over $\mathcal{A}''$ via a morphism $\varphi: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}''$ of base change is defined in an obvious way. We say that a deformation of f by $\mathcal{A}'$ is *trivial* if it is induced via β' by the deformation $\mathbf{D}_{\mathcal{A}} = (f, \text{id } B)$ of f by $\mathcal{A} = (\text{id } A, \text{id } A)$.

Now, consider the trivialisation functor [6] of a given deformation $\mathbf{D} = (f', i)$ of f by $\mathcal{A}'$:

$$\mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}: \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{Set}$$

defined by $\mathcal{A}'' \rightarrow \mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}(\mathcal{A}'') := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_f}(\mathcal{A}', \mathcal{A}''), \mathbf{D}/\mathcal{A}'' \sim \mathbf{D}_{\mathcal{A}''}\}$, $\mathcal{A}'' \in \mathcal{C}_f$ and $\mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}(\psi) = \psi_{0-}: \mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}(\mathcal{A}'') \rightarrow \mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}(\mathcal{A}''')$, for every morphism $\psi: \mathcal{A}'' \rightarrow \mathcal{A}'''$ in $\mathcal{C}_f$. If $\mathbf{Triv}_{\mathbf{D}}$ is representable, we say that $\mathbf{D}$ is *trivialisable*. If $\mathbf{D}$ is trivialisable and $\mathbf{Triv}_{\mathbf{D}} = \mathcal{A}'$, then we say that $\mathbf{D}$ is *trivial*.

(1.4) **Definition.** A flat analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ is called *rigid (iflicable)* for the base change $\mathcal{A}'$ if every deformation $\mathbf{D}$ of f by $\mathcal{A}'$ is trivial (isable). If f is rigid (iflicable) for the tangential base change, we say that f is *tangentially rigid (iflicable)*. If f is rigid (iflicable) for every base change, we say that f is *rigid (iflicable)*.

§ 2. Versal formal deformations and rigid(iflicable) homomorphisms

If $f: A \rightarrow B$ is a flat analytic homomorphism with artinian base, the notions of „hull“, „pro-representability“ and „tangent space“ considered by Schlessinger in [4] for functors on artinian rings, can be introduced in a similar way for the deformation functor $\mathbf{Def}(f, -)$. In [2] we constructed a cohomology theory of analytic algebras using extensions of analytic algebras by analytic modules and we proved the following isomorphism of finite B -modules: $\text{Ex}_A^n(B, M) \simeq \mathbf{T}^n(B/A, M)$, $n \in \mathbb{N}$, between the B -module of the equivalence classes of the n -fold extensions of the analytic A -algebra B by the analytic B -module M , and the n -th cohomology B -module of B with coefficients in M . It is easy to see that for every flat analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ and for every analytic A -module M , there is a bijection of pointed sets:

$$\text{Ex}_A^1(B, M \oplus_A B) \simeq \mathbf{Def}(f, \mathcal{A} \oplus M).$$

In particular, observe that

$$\text{Ex}_A^1(B, B) \simeq \mathbf{T}^1(B/A, B) \simeq \mathbf{Def}(f, \mathcal{A}[\varepsilon])$$

(comp. [5]), which shows that the „tangent space“ of the deformation functor $\mathbf{Def}(f, -)$ is an analytic B-module.

In this § we give our results; details and proofs will appear in [1].

(2.1) **Definition.** The formal deformation $\hat{\mathbf{D}} = \{\mathbf{D}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ of the flat analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ by the formal base change $\hat{\mathcal{A}}'$ is

complete, if for every morphism $\varphi: \hat{\mathcal{A}}' \rightarrow \mathcal{A}'$, every epimorphism $\pi: \mathcal{A}'' \rightarrow \mathcal{A}'$ with $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathcal{C}_f$ and every deformation $\mathbf{D}$ of f by $\mathcal{A}''$ with $\tilde{\mathbf{D}}/\mathcal{A}' = \hat{\mathbf{D}}/\mathcal{A}'$, there exists a morphism $\psi: \hat{\mathcal{A}}' \rightarrow \mathcal{A}''$ so that $\mathbf{D}/\mathcal{A}'' = \mathbf{D}$ and $\pi \psi = \varphi$;

effective, if for every two morphisms $\varphi_1, \varphi_2: \hat{\mathcal{A}}' \rightarrow \mathcal{A}[\varepsilon]$ with $\hat{\mathbf{D}}/\mathcal{A}[\varepsilon]$ (via φ_1) = $\hat{\mathbf{D}}/\mathcal{A}[\varepsilon]$ (via φ_2) it follows $\varphi_1 = \varphi_2$;

versal, if it is complete and effective.

The (analytic) deformation $\mathbf{D}$ of f by $\mathcal{A}'$ is *versal* if its associated formal deformation $\hat{\mathbf{D}}$ is versal.

Clearly, $\mathbf{Def}(f, -)$ has a hull $(\hat{\mathcal{A}}', [\hat{\mathbf{D}}]) \in \hat{\mathcal{C}}_f \times \hat{\mathbf{Def}}(f, \hat{\mathcal{A}}')$ if and only if the formal deformation $\hat{\mathbf{D}}$ is versal.

Now, we get the following

(2.2) **Theorem.** Every flat analytic homomorphism $f: A \rightarrow B$ with artinian base and so that $\mathbf{T}^1(B/A, B) [\simeq \mathbf{Def}(f, \mathcal{A}[\varepsilon])]$ is an analytic A-module, has a versal formal deformation.

The theorem follows from the fact that $\mathbf{Def}(f, -)$ satisfies the Schlessinger-conditions (see [1]).

For a finite and flat analytic homomorphism with artinian base (i.e., for an artinian analytic homomorphism) it follows that $\mathbf{T}^1(B/A, B)$ is an analytic A-module and so we state:

(2.3) **Theorem.** Every artinian analytic homomorphism has a versal formal deformation.

(2.3.1) **Consequence.** Every artinian analytic algebra has a versal formal deformation.

We conclude giving our results concerning the rigidity of homomorphisms.

(2.4) **Theorem.** Every smooth analytic homomorphism is rigidifiable.

(2.4.1) **Consequence.** Every regular analytic algebra is rigidifiable.

(2.5) **Theorem.** Every flat analytic homomorphism with artinian base is rigid if and only if it is tangentially rigid.

(2.6) **Theorem.** Every smooth analytic homomorphism with artinian base is rigid.

(2.6.1) **Consequence.** Every regular analytic algebra is rigid.

BIBLIOGRAPHY

1. Hatvany, Cs.: Deformations of analytic homomorphisms, to appear.
2. Hatvany, Cs.: Extensions and cohomology for analytic algebras, to appear.
3. Kramm, B.: Über Deformationen von analytischen Abbildungskeimen, manus. math. **10**, 163–189 (1973).
4. Schlessinger, M.: Functors of Artin rings, Trans. AMS **130**, 208–222 (1968).
5. Schuster, H. W.: Deformationen analytischer Algebren, Invent. math. **6**, 262–274 (1968).
6. Schuster, H. W.: Über den trivialen Ort von Deformationen komplexer Strukturen, Math. Ann. **194**, 135–146 (1971).

ASUPRA MĂSURILOR DE PROBABILITATE DIN SUBSPAȚII ALE SPAȚIULUI BANACH AL MĂSURILOR REALE ȘI MĂRGINITE

DE

OCTAVIAN LIPOVAN

1°. Fie $f_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($i=1, 2, \dots, p$) crescătoare și continue la stînga în orice punct din $\mathbf{R}$, $\mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)}$, σ — algebra mulțimilor măsurabile Lebesgue-Stieltjes din $\mathbf{R}^p$, generată de funcțiile f_i ($i=1, 2, \dots, p$) iar $\mu_{f_1 \dots f_p}^{(P)}: \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \rightarrow \mathbf{R}$, măsura Lebesgue-Stieltjes corespunzătoare.

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^p$, mărginită și închisă, iar $(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega, \mu)$ spațiul cu măsură unde μ este restricția lui $\mu_{f_1 \dots f_p}^{(P)}$ la $\mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega$. Se știe [2] că spațiul $L'(\Omega, \mu)$ al funcțiilor reale integrabile pe Ω este un spațiu Banach separabil, unde mulțimea numărabilă a polinoamelor de p variabile reale $t_1, t_2, \dots, t_p$ cu coeficienți raționali este densă.

Fie $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, mulțimea tuturor măsurilor reale și mărginite, definite pe $\mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega$, care este un spațiu Banach complet reticulat cu norma $\|v\| = |v|(\Omega)$ unde $|v|$ este variația totală a măsurii v .

Se știe [4] că aplicația $f \rightarrow f \cdot \mu$, care la fiecare clasă de funcții reale integrabile $f \in L'(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ face să-i corespundă măsura mărginită $f \cdot \mu$, este o izometrie a spațiului $L'(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ pe subspațiul $\mathfrak{M}_1(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ format cu măsurile absolut continue prin raport cu μ .

Această izometrie rezultă din $\|f\| = \int |f| d\mu$.

Să considerăm mulțimea :

$$Q^P = \{q_i; q_i = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_p^i), t_j^i \in Q, i \in N, 1 \leq i \leq p\}$$

$Q^P \subset \mathbf{R}^p$. Notînd cu $\delta_{q_i}: \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega \rightarrow [0, 1]$ măsura degenerată în q_i , vom considera mulțimea de măsuri $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \subset \mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ unde :

$$\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) = \{\lambda; \lambda = \sum_{i \in N} a_i \delta_{q_i}, a_i \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty\}.$$

Se constată că $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ este un spațiu Banach cu bază numărabilă, unde mulțimea

$$\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) = \left\{ \lambda; \lambda_n = \sum_{i \in N} a_i^{(n)} \delta_{q_i^{(n)}}, \begin{matrix} a_i^{(n)} = 1 \text{ dacă } i = n \\ a_i^{(n)} = 0 \text{ dacă } i \neq n \end{matrix} \right\}$$

este baza numărabilă. Vom considera în continuare acoperirea liniară închisă a spațiilor

$$\mathfrak{M}_1(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \text{ și } \mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega); \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)}) = \overline{Sp(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)}.$$

Evident că $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ este un spațiu Banach separabil, unde mulțimea numărabilă densă este :

$$\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) = \left\{ \lambda; \lambda = f \cdot \mu + \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i, \lambda_i \in \mathfrak{M}_0, \alpha_i \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}. \right. \\ \left. f = \text{polinom cu coef. raționali} \right\}$$

2°. În cele ce urmează, vom nota cu $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2}$, σ — algebra mulțimilor boreliene din spațiul Banach $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și cu $\mathfrak{M}_2^*$, dualul său topologic.

Fie τ măsură de probabilitate definită în $(\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2})$, astfel că :

$$\int_{\mathfrak{M}_2} \|\lambda\|^2 d\tau(\lambda) < \infty, \lambda \in \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega).$$

Se știe din [3] că, operatorul de covarianță $S: \mathfrak{M}_2^* \rightarrow \mathfrak{M}_2$ al măsurii de probabilitate τ , este definit cu ajutorul integralei Bochner prin :

$$S(\mathfrak{F}) = (B) \int_{\mathfrak{M}_2} (\mu - \mu_0) \mathfrak{F} (\mu - \mu_0) d\tau(\mu)$$

pentru orice $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ unde $\mu_0 \in \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ este măsura medie pentru τ :

$$\mu_0 = \int_{\mathfrak{M}_2} \lambda d\tau(\lambda).$$

3°. În prezenta lucrare ne propunem să stabilim o corespondență între mulțimile mărginite din $\mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și măsurile de probabilitate definite pe $\mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)}$, prin intermediul operatorului de covarianță S al unei măsurii de probabilitate τ , fixată din spațiul $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$. Astfel, fiecărei mulțimi mărginite $H \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ îi corespunde o măsură de probabilitate $\lambda_0: \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega \rightarrow [0, 1]$, în așa fel ca pentru orice $\mathfrak{F} \in H$, $S(\mathfrak{F}) \ll \lambda_0$.

Lema 1. Operatorul S este secvențial continuu prin raport cu topologia slabă din $\mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și topologia normei din $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

Demonstrație.

Fie $\{\mathfrak{F}_n\} \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ un șir slab convergent către $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, adică $\mathfrak{F}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(\mu)$ pentru orice $\mu \in \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$. Din teorema lui Banach-Steinhaus rezultă : $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|\mathfrak{F}_n\| < M < \infty$.

Avem :

$$\|S(\mathfrak{F}_n) - S(\mathfrak{F})\| = \left\| (B) \int_{\mathfrak{M}_2} (\mu - \mu_0) (F_n - F) (\mu - \mu_0) d\tau(\mu) \right\| < \\ < \int_{\mathfrak{M}_2} \|(\mu - \mu_0) (\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}) (\mu - \mu_0)\| d\tau(\mu) = \int_{\mathfrak{M}_2} |(\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}) (\mu - \mu_0)| \|\mu - \mu_0\| d\tau(\mu).$$

Dar $\int_{\mathfrak{M}_2} |(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_n)(\mu - \mu_0)| \|\mu - \mu_0\| d\tau(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, din teorema lui Lebesgue de convergență dominată și deci

$$\|S(\mathfrak{F}_n) - S(\mathfrak{F})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Leme 2. Operatorul S este un operator complet continuu.

Demonstrație.

Fie $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \in N} \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ un șir mărginit adică $\|\mathfrak{F}_n\| \leq M < \infty$, pentru orice $n \in N$.

Deoarece mulțimile mărginite în $\mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ sint relativ compacte în topologia slabă, rezultă că există $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și $\{x_j\}_{j \in N}$, astfel că $\mathfrak{F}_{n_j}(\mu) \xrightarrow{j} \mathfrak{F}(\mu)$ pentru orice $\mu \in \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$. Din lema 1, rezultă atunci că $\|S(\mathfrak{F}_{n_j}) - S(\mathfrak{F})\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, astfel că șirul $\{S(\mathfrak{F}_n)\}_{n \in N}$ conține un subșir convergent.

Teoremă. Fie $S : \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \rightarrow \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ operatorul de covarianță al unei măsuri de probabilitate τ .

Pentru orice mulțime mărginită $H \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ există o măsură de probabilitate $\lambda_0 : \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega \rightarrow [0, 1]$, astfel că pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel ca : $\lambda_0(E) < \delta(\varepsilon)$ implică $|S(\mathfrak{F})_{(E)}| < \varepsilon$ pentru orice $\mathfrak{F} \in H$.

Demonstrație.

Operatorul S fiind complet continuu, iar H fiind o mulțime mărginită, rezultă că mulțimea $\{S(\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F} \in H}$ este relativ compactă în $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, deci e relativ compactă și în topologia slabă din acest spațiu. Vom arăta la început că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr real $\delta > 0$ și funcționalele liniare $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_m$ din H în număr finit, astfel că :

$$|S(\mathfrak{F}_l)_{(E)}| < \delta \quad (1 \leq l \leq m) \text{ implică } |S(\mathfrak{F})_{(E)}| \leq \varepsilon$$

pentru orice $\mathfrak{F} \in H$ și $E \in \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega$. Într-adevăr, dacă o astfel de constantă și astfel de funcționale $\mathfrak{F}_e$ nu ar exista, ar fi posibilă alegerea prin recurență în H , a unui șir de funcționale $\{\mathfrak{F}_k\}_{k \in N}$ și a unui șir de mulțimi $\{E_k\}_{k \in N}$, $E_k \in \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega$ astfel că

$$|S(\mathfrak{F}_m)_{(E_k)}| < 2^{-k}, \quad (1 \leq m \leq k), \quad |S(\mathfrak{F}_{k+1})_{(E_k)}| \geq \varepsilon$$

Punînd :

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \|S(\mathfrak{F}_k)\|} \cdot |S(\mathfrak{F}_k)| \text{ unde } |S(\mathfrak{F}_k)|$$

este variația totală a măsurii $S(\mathfrak{F}_k)$, vom obține astfel un șir $\{\mathfrak{F}_k\} \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, conținut în H și cu $\{S(\mathfrak{F}_n)\}$ relativ compact prin raport cu topologia slabă din $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$. Se observă că măsurile $S(\mathfrak{F}_k) \ll \lambda_0$, deci putem considera că șirul de măsuri $\{S(\mathfrak{F}_k)\}_{k \in N}$ este conținut în spațiul $L'(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega, \lambda_0)$ și este relativ compact prin raport cu topologia slabă din acest spațiu [4].

Șirul $\left\{ \frac{dS(\mathfrak{F}_k)}{d\lambda_0} \right\}_{k \in N}$ al derivatelor Radon-Nikodym, va fi deci echiintegrabil în $L'(\Omega, \mathfrak{L}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega, \lambda_0)$ ceea ce este imposibil deoarece $\lambda_0(E_k) \xrightarrow{k} 0$ și $|S(\mathfrak{F}_{k+1})_{(E_k)}| \geq \varepsilon$.

După ce am introdus pentru orice $\varepsilon = \frac{1}{n}$, o constantă δ_n și funcționalele $\mathfrak{F}_1^{(n)}, \dots, \mathfrak{F}_{m_n}^{(n)}$, avînd proprietățile de mai sus, vom alege constantele $a_l^{(n)} > 0$ ($1 \leq l \leq m_n$, $n > 1$) astfel ca $\lambda_0 = \sum_{l,n} a_l^{(n)} |S(\mathfrak{F}_l^{(n)})|$ să fie o probabilitate.

Cu condiția să alegem pe δ suficient de mic, vom avea atunci pentru un întreg n , fixat dinainte:

$\lambda_0(E) \leq \delta$ implică $|S(\mathfrak{F}_l^{(n)})|_{(E)} < \delta_n$ ($1 \leq l \leq m_n$) implică mai departe $|S(\mathfrak{F})_{(E)}| \leq \frac{1}{n}$ pentru orice $\mathfrak{F} \in H$.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. De Acosta A. D. (1970) — „Existence and convergence of probability measures in Banach spaces” — Trans. Amer. Math. Soc. 152, 273—298.
- [2]. Lipovan O. — „Asupra convergenței slabe a măsurilor de probabilitate pe spațiul funcțiilor integrabile Lebesgue-Stieltjes.” Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic Timișoara, Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Tom 21 (35) Fasc. 2. 1976.
- [3]. Lipovan O. — „Operatorul de covarianță al măsurilor de probabilitate definite pe spațiul Banach al măsurilor reale și mărginite” — Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara, Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată, Fasc. 2. 1977.
- [4]. Neveu J. — „Bases mathématiques du calcul des probabilités” — Masson et C^{ie} Editures Paris, 1964.
- [5] Rajput B. S. — „Gaussian Measures on L^p Spaces” — Series No 782, Department of Statistics, University of North Carolina at Chape Hill.

SUR LES MESURES DE PROBABILITÉ DANS SOUS-ESPACES DE L'ESPACE DE BANACH DES MESURES RÉELLES ET BORNÉES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail on donne une correspondance entre $\mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{F}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ et les mesures de probabilité définies sur $\mathfrak{F}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega$, par l'intermédiaire de l'opérateur de covariance S d'une mesure de probabilité τ dans l'espace $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{F}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

De cette façon à chaque ensemble borné $H \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{F}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ on fait lui correspondre une mesure de probabilité $\lambda_0: \mathfrak{F}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que pour toute $\mathfrak{F} \in H$ on a $S(\mathfrak{F}) \leq \lambda_0$.

STUDIUL ABSORBȚIEI RADIAȚIEI INFRAROȘII DE CĂTRE UNELE MATERIALE UTILIZATE ÎN CAPTAREA ENERGIEI SOLARE

DE

COLETA DE SABATA, CRISTIAN MARCU, IOAN MIHALCA, IOAN LUMINOSU

Introducere. În stadiul actual al cercetărilor, utilizarea energiei solare s-a dovedit competitivă în domeniile industriale care necesită cantități mari de căldură la temperaturi nu prea înalte și variabile în limite destul de largi. Metoda care convine cel mai bine se bazează pe fenomenul cunoscut sub numele de „efect de seră” [1, 2, 3], efect care permite o reducere substanțială a pierderilor de energie sub formă de căldură stocată în insulator.

Randamentul global al instalației depinzând de mai mulți parametri în lucrarea de față ne-am propus să studiem influența coeficientului de absorbție al plăcii vopsită în negru asupra calității insulatorului plan.

Considerații teoretice. Bilanțul energetic în cazul funcționării unui insulator plan este dat de relația

$$dW_a = dW_T + dW_p \quad (1)$$

unde dW_a este energia absorbită de sistem într-un interval de timp dt

dW_T — energia necesară ridicării temperaturii corpului iradiat

dW_p — energia pierdută de corp.

Luând în considerare constantele de material, suprafața S_r iradiată, coeficientul de absorbție α a radiațiilor infraroșii, intensitatea J a radiației, factorul de pierderi în contact cu mediul λ și suprafața de pierderi S_p , rel. (1) conduce la ecuația diferențială (2):

$$\alpha \cdot J \cdot S_r \cdot dt = \rho h S \cdot c dT + \lambda \cdot S_p (T - T_0) dt \quad (2)$$

în care: ρ este densitatea,

h — grosimea,

S — suprafața,

c — căldura specifică.

Prin integrarea ecuației (2) se obține:

$$T - T_0 = \frac{\alpha J}{\lambda} \frac{S_r}{S_p} \left(1 - e^{-\frac{\lambda \cdot S_p}{\rho \cdot h \cdot S \cdot c} t} \right). \quad (3)$$

Având în vedere că la $t=0$, T este egal cu T_0 (T_0 — temperatura ambiantă). Din relația (3) rezultă temperatura maximă pe care o poate atinge corpul iradiat în condițiile normale de pierderi:

$$T_{max} = T_0 + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{S_r}{S_p} J. \quad (4)$$

Analiza relațiilor (3) și (4) arată că:

— în cazul transmițerilor de căldură prin convecție [4] indiferent de natura corpului încălzit, temperatura maximă ce se obține poate fi egală cu a fluidului care este agent purtător de căldură;

— materialele diferite supuse unei acțiuni identice de iradiere [5] în i.r. ajung la temperaturi conținute pe o plajă largă de valori determinate de propriile lor calități și în special de coeficientul de absorbție α ;

— temperatura corpului iradiat tinde spre o valoare maximă în condiții date, stabilită prin relația (4).

Rezultate experimentale. În vederea stabilirii compoziției unui material cu calități absorbante superioare s-au determinat experimental curbele de încălzire pentru plăci de fier cu grosimea $h=0,5$ mm și suprafața de radiație $S_r=25$ cm² având una din fețe acoperite cu substanțe absorbante de diverse

structuri. Ca surse de radiații infraroșii s-au folosit lămpi tip IR de 150 watt iar temperatura s-a măsurat cu un dispozitiv de tip AMTC:

În fig. 1, 2, 3 sint prezentate cîteva din curbele de încălzire ca funcție de timpul de iradiere pentru cîteva din compozițiile materialului absorbant, iar în fig. 4 se dă variația pantei în origină în funcție de materialul absorbant.

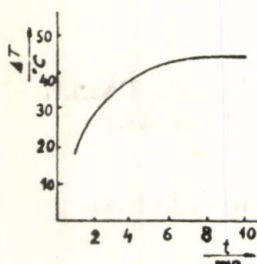


Fig. 1. Variația temperaturii în funcție de timpul de iradiere pentru compoziția cu pigmentul Y.

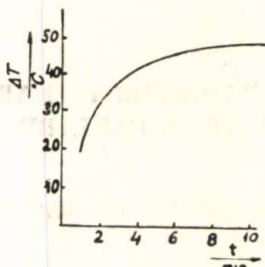


Fig. 2. Variația temperaturii în funcție de timpul de iradiere pentru compoziția cu pigmentul Y.

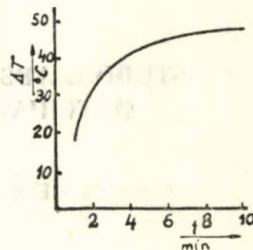


Fig. 3. Variația temperaturii în funcție de timpul de iradiere pentru compoziția cu pigmentul Z.

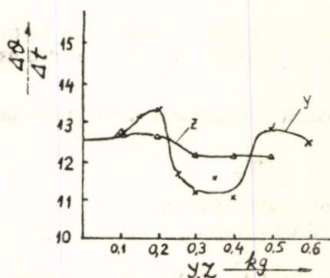


Fig. 4. Variația pantei în origine a curbei de încălzire în funcție de compozițiile materialului absorbant.

Din analiza comparativă a celor două curbe (fig. 4) rezultă că materialul absorbant cel mai convenabil se încadrează în compozițiile: $Y=0,2 V_N$ sau $Z=0,2 V_N$, unde Y și Z sint pigmenți absorbant și V_N materialul absorbant suport. Valorile ce corespund lui (0,5~0,6) Y nu convin deoarece la proprietăți practic identice impun folosirea unei cantități mari de pigment absorbant ceea ce ridică probleme economice și de tehnologie a sprayerii uniforme.

BIBLIOGRAFIE

1. Perrot M., Desantal J., Peri G., Gallet P., Boutrier M., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“, Marseille, France, 1966, Bul. Nr. 10, pp. 91, 92, 93.
2. Pailharey D., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“, Marseille, France, 1969, Bul. Nr. 16, pp. 23, 24.
3. Pailharey D., et Himma A., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“ Marseille, France, 1971, Bul. Nr. 19, pp. 39, 40, 43.
4. Focșă V., Higrtermica și acustica clădirilor, Ed. did. și ped. București, 1975.
5. Dimitriu-Vilcea E., Termotehnica în construcție, Ed. Acad. R.S.R. 1970.

DAS STUDIUM DER INFRAROTENABSORPTION EINIGER STOFFE DIE BEI DER ANLAGERUNG DER SONNENENERGIE VERWENDET WERDEN

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit sind experimentelle Ergebnisse in bezug auf die Verbesserung der Auffangzellen der Sonnenenergie von Typ «Sonnenauffänger» durch die Herstellung eines Stoffes, dessen Absorptionskoeffizient gross ist, wiedergegeben.

Es ist die Temperaturabhängigkeit in bezug auf die Pigmentquantität in der Grundsubstanz, mit dessen Hilfe die Auffänger der Sonnenenergie bedeckt werden, dargestellt.

CERCETĂRI DE LABORATOR ÎN VEDEREA MĂRIRII RANDAMENTULUI OPTIC A INSOLATOARELOR PLANE

DE

COLETA DE SABATA, AURICA MUNTEANU, CRISTIAN MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI

Dintre mijloacele curente de captare și utilizare a energiei solare care au căpătat o dezvoltare deosebită în ultimul timp s-a impus cu precădere, în faza actuală, metoda de folosire a ei directă sub formă de căldură înmagazinată într-un mediu fluid convenabil ales scopului [1, 2, 3, 4, 5]

În studiul de laborator al insolatoarelor plane — cu schița de funcționare prevăzută în fig. 1 — un accent deosebit s-a pus pe mărirea randamentului global η_g , dat de randamentele optic η_0 și termic η_t al instalației :

$$\eta_g = \eta_0 \cdot \eta_t \quad (1)$$

În lucrarea de față ne-am axat preocupările pe mărirea randamentului optic care poate fi exprimat, în acord cu [6] prin :

$$\eta_0 = A \left(t + \frac{a}{2} \right) \quad (2)$$

unde :

A este coeficientul de absorbție al suprafeței absorbante ;

t și a — coeficienții de transmisie, respectiv de absorbție ai învelișului.

Mărirea randamentului optic depinde esențial de calitățile materialului ce formează învelișul exterior și care trebuie să se bucure de următoarele proprietăți contradictorii : să aibă o transmisie foarte bună în vizibil și să fie opac în infraroșu pe o plajă largă de valori ale lungimilor de undă electro-magnetice, să fie ușor ca greutate dar rezistent mecanic, să nu se degradeze sub acțiunea prelungită a iradierii și a intemperiei și să fie ieftin.

În vederea găsirii unor materiale cu proprietăți cât mai convenabile din toate punctele de vedere enunțate am studiat o gamă largă de produse începînd cu cele mai variate sticle de geamuri și terminînd cu unele materiale plastice. Studiul a fost efectuat cu ajutorul unui spectrofotometru de tip VSU 2 și citeva din rezultate sînt sintetizate în curbele din fig. 2. Domeniul lungimilor de undă a cuprins intervalul $0,65 \mu - 1,1 \mu m$.

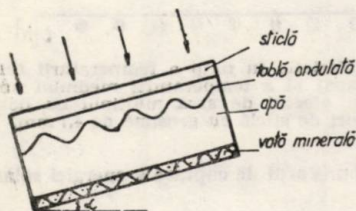


Fig. 1. Schița insulatorului plan.

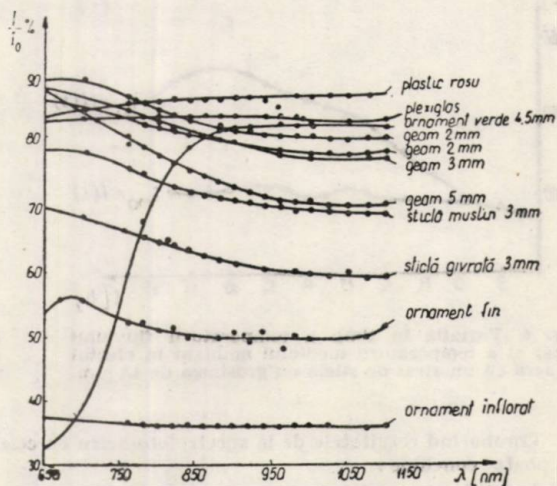


Fig. 2. Curbele de transmisie a radiațiilor infraroșii pentru diferite materiale.

Din spectrogramele obținute se desprind următoarele concluzii :

1) Materialele studiate se pot clasifica în trei categorii :

- materiale cu transmisie bună (peste 70%)
- materiale cu transmisie medie (între 40—70%)
- materiale cu transmisie slabă (sub 40%)

În prima categorie se includ sticlele de geam cu grosimi de 2—5 mm precum și o varietate de sticlă ornamentală de culoare verde care are o transmisie de 82%.

2) Cea mai bună transmisie o prezintă un material plastic roșu cu grosimea de 2 mm precum și folia transparentă de polietilenă, transmisia atingând valori între 87—89%.

3) Întrucât materialele plastice prezintă o ușoară instabilitate a transmisiei, apreciem că sticlele de geam cu grosimi între 2—5 mm sînt cele mai utile pentru acoperirea celulelor de captare a radiației solare.

Materialele care au prezentat calitățile cele mai convenabile au fost apoi utilizate în studiul captării energiei solare cu ajutorul unui microinsolator de laborator. În fig. (3, 4, 5) prezentăm cîteva curbe de funcționare.

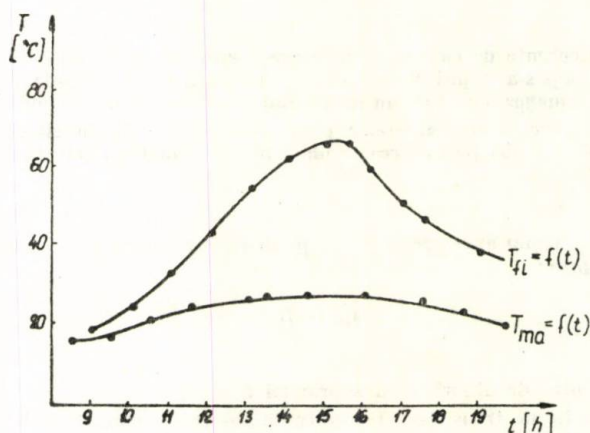


Fig. 3. Variația în timp a temperaturii fluidului (apă) și a temperaturii mediului ambiant în efectul de seră cu un strat de sticlă cu grosimea de 4 mm.

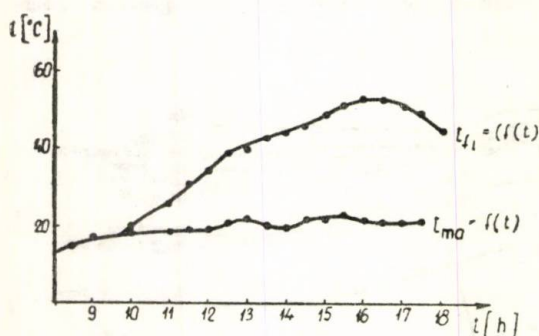


Fig. 4. Variația în timp a temperaturii fluidului (apă) și a temperaturii mediului ambiant în efectul de seră cu un strat de sticlă cu grosimea de 4,7 mm.

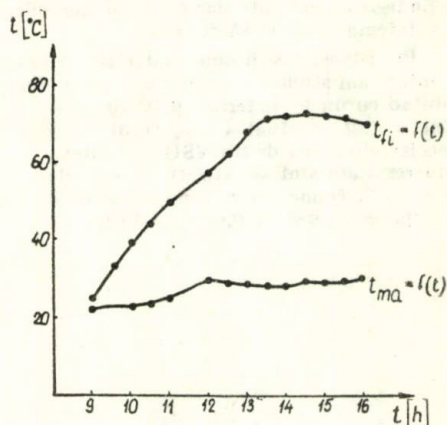


Fig. 5. Variația în timp a temperaturii fluidului (apă) și a temperaturii mediului ambiant în efectul de seră multiplu cu două straturi de sticlă cu grosime de 4,7 mm.

Coroborînd rezultatele de la spectrofotometru cu cele din laborator de captare a energiei solare se poate conchide :

1. Utilizarea sticlelor cu grosimea de 4 mm și 4,7 mm realizează diferențe de temperatură de 32°C și 38°C între fluidul de lucru și mediul ambiant.

2. Efecte remarcabile se obțin cu insolatoare plane care lucrează cu două straturi de sticlă de 4,7 mm când diferența de temperatură fluid-mediu ambiant depășește ușor 40 °C.

3. O transmisie mai ridicată în efectul de seră simplu [6] și multiplu [7] produce o mai bună uniformizare a temperaturii și reduce pierderile de radiație spre exterior.

BIBLIOGRAFIE

1. Justi E. W., „Cooperation Méditerranéenne pour l'énergie solaire “ Marseille, France, 1965 Bul. nr. 8, p. 35.
2. Kondratiev N., „Lucistaia energhia solnă“ Moskva, U.R.S.S. 1952, cap. 12.
3. Pisoni C., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“ Marseille, France, 1968 Bul. nr. 14 pp. 45, 51.
4. Girardier J. P. et Masson H., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“, Marseille, France, 1970, Bul. 18, pp. 96, 98.
5. Perrot M., Desautel J., Peri G., Gallet P., Boutrier M., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“ Marseille, France, 1966, Bul. nr. 10 pp. 91, 92, 93.
6. Pailharey D., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“ Marseille, France, 1969, Bul. Nr. 16, pp. 23, 24.
7. Pailharey et Himma A., „Coop. Medit. pour l'énergie solaire“ Marseille, France, 1971, Bul. Nr. 19, pp. 39, 40, 43.

LABORATORIUMFORSCHUNGEN ÜBER DIE VERGRÖßERUNG DER OPTISCHEN LEISTUNG DER EBENEN INSOLATOREN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit umfasst ein Studium über die Transmissioneigenschaft einiger Stoffe, die bei Auffangzellen der Sonnenenergie verwendet werden.

Die durchgeführten experimentellen Untersuchungen zeigten, dass die Scheibengläser von 2—5 mm Dicke, die beste Transmission aufweisen. Dies führt zu einer erheblichen Vergrößerung der optischen Leistung der ebenen Insolatoren.

SUSCEPTIBILITATEA MAGNETICĂ ÎN SISTEMUL OXIZILOR
IZOMORFI α -Fe₂O₃—Al₂O₃—Cr₂O₃

DE

MINERVA CRISTEA

I. Introducere

Măsurarea susceptibilității magnetice în sistemul ternar al oxizilor izomorfi α —(Fe, Al, Cr)₂O₃ este impusă de necesitatea unor date fundamentale mai ample asupra interacțiunilor din acest sistem utilizat în cataliza reacțiilor chimice.

Susceptibilitatea magnetică prezintă importanță pentru că este o constantă fizică de material și se utilizează la determinarea vitezei de reacție și a constantei de echilibru în cataliză.

Fierul și cromul fac parte din prima perioadă de tranziție și momentul magnetic resultant poate duce la combinații fero și antiferomagnetice. Sistemul abordat este diluat cu componenta diamagnetică Al₂O₃.

Oxizii α -Fe₂O₃ și α -Cr₂O₃, cu toată izomorfia lor de tip corindon, prezintă structuri antiferomagnetice diferite, clarificate prin difracția cu neutroni [1].

Astfel, momentele magnetice ale Fe³⁺ se situează în rețeaua hexagonală de tip corindon, în straturi perpendiculare la axa C, iar direcția lor alternează de la un strat la altul.

La temperatura ambiantă direcția de spin este paralelă cu planul bazei hexagonal, iar sub 250 °K direcția de spin se rotește.

La α -Cr₂O₃ momentele magnetice în planul hexagonal sînt două cîte două anti-paralele, iar direcția de spin este paralelă cu axa C. Temperaturile Néel ale celor doi oxizi sînt :

$$T_N = 963 \text{ }^\circ\text{K pentru } \alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$$

și

$$T_N = 308 \text{ }^\circ\text{K pentru } \alpha\text{-Cr}_2\text{O}_3$$

Literatura de specialitate nu prezintă determinări de susceptibilitate magnetică în acest sistem ternar.

Partea experimentală

1. **Probele** — Pentru măsurarea susceptibilității magnetice s-au utilizat 26 de probe avînd compoziția prezentată în tabelul 1. Aceste probe s-au obținut prin interacțiunea oxizilor în aer, la 1 250 °C și răcire lentă pînă la temperatura camerei conform procedului prezentat într-o lucrare anterioară [2].

Tabelul 1

Nr. probei	Compoziția în % mol.			Nr. probei	Compoziția în % mol.		
	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃		Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃
1	90	9	1	14	50	15	35
2	90	7	3	15	50	5	45
3	90	5	5	16	30	63	7
4	90	3	7	17	30	49	21
5	90	1	9	18	30	35	35
6	70	27	3	19	30	21	49
7	70	21	9	20	30	7	63
8	70	15	15	21	10	81	9
9	70	9	21	22	10	63	27
10	70	3	27	23	10	45	45
11	50	45	5	24	10	27	63
12	50	35	15	25	10	9	81
13	50	25	25	26	33,3	33,3	33,3

2. **Metoda de investigație.** Pentru efectuarea măsurătorilor s-a realizat o balanță magnetică prin adaptarea unei balanțe analitice la un electromagnet Weiss (fig. 1).

Determinarea susceptibilității magnetice a probei pulverulente se bazează pe măsurarea forței (echilibrarea balanței cu greutatea), care acționează asupra ei în câmp magnetic neuniform.

Balanța realizată reprezintă o variantă ușor modificată a metodei Gouy [3], de care diferă prin modul de așezare a probei și dimensiunile acesteia.

Metoda se bazează pe faptul că asupra unei probe dia sau paramagnetice de masă m și susceptibilitate χ (pentru 1 gram) acționează forța :

$$f_x = m\chi H \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2} m\chi \frac{\partial}{\partial x} (H^2). \quad (1)$$

Dimensiunile probei s-au ales astfel încît $\frac{\partial (H)^2}{x}$ să fie constant de-a lungul acesteia. Măsurătorile s-au efectuat față de substanțele etalon Cr₂O₃ și NiSO₄·7 H₂O, asigurîndu-se erori sub 3%. Instalația permite realizarea unui gradient de câmp constant pînă la $B=0,75$ T.

3. **Rezultatele experimentale.** Rezultatele experimentale sînt prezentate sintetic în fig. 2 sub forma susceptibilității magnetice molare χ_m (la 21 °C) în funcție de diluția magnetică pe serii de probe cu conținut constant de Fe₂O₃ (notate cu cifre arabe), în comparație cu valorile calculate teoretic conform relației (2) pentru aceleași probe (notate cu cifre romane).

$$\mu_{eff} = 2,839 [\chi_M \cdot T]^{1/2}. \quad (2)$$

Pentru calculul teoretic al momentului magnetic efectiv legat de χ_M prin relația (2) s-a luat în considerare numai componenta de spin a ionilor Fe³⁺ și Cr³⁺ care au termenul fundamental ⁶S_{5/2}, respectiv ⁴F_{3/2}.

III. Concluzii

Din cele de mai sus se observă următoarele :

— abaterea susceptibilității molare experimentale de la variația teoretică liniară, cu diluția magnetică (fig. 2),

M - electromagnet, T - tub de apărare
B - balanță analitică, P - tub cu probă

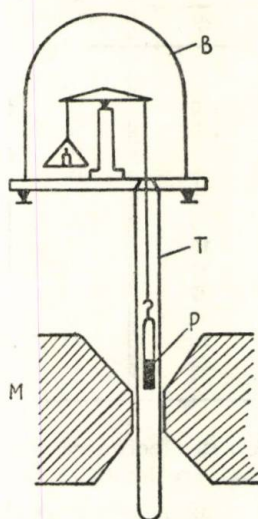


Fig. 1. Balanța magnetică.

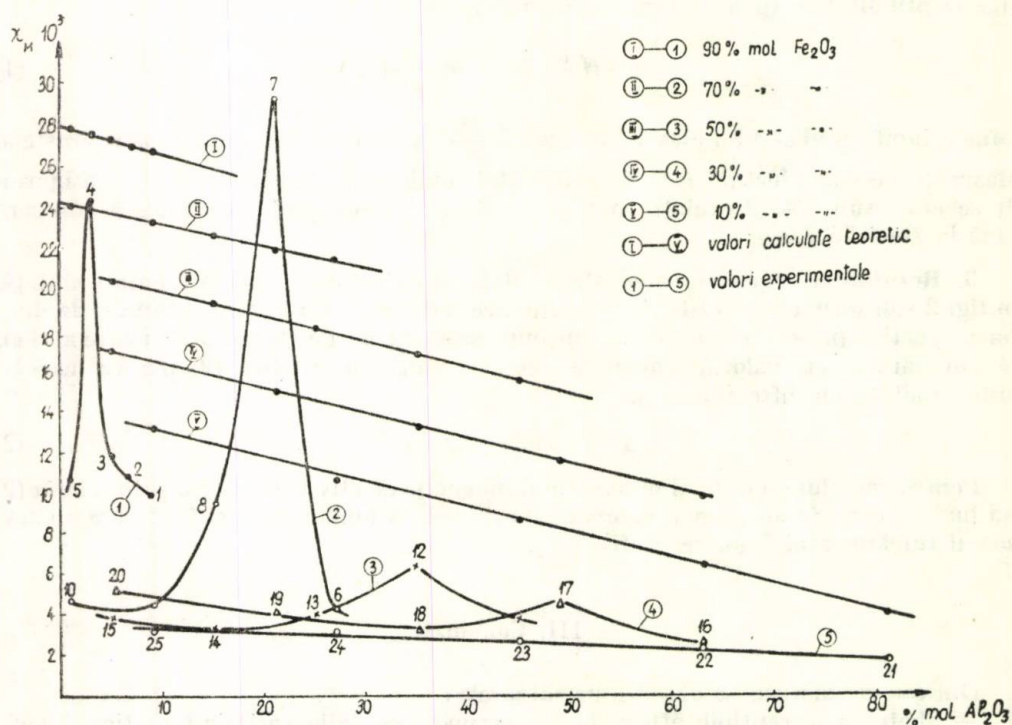


Fig. 2. Dependența susceptibilității magnetice molare (χ_M) de diluția magnetică.

— susceptibilitățile molare experimentale sînt mai mici decît cele calculate teoretic, cu excepția probei 7, evidențiindu-se interacțiunea de tip antiferomagnetic, — probele 6, 7, 11, 12, 16 și 17 fac parte din lacuna de mișcibilitate a sistemului ternar în care s-au pus în evidență, prin difracția de raze X, două faze corindonice [2], [4], [5].

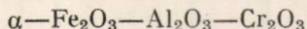
— variația χ_M cu diluția magnetică scoate în evidență modificările de structură din cristalele mixte la limita lacunei de mișcibilitate, care sînt în concordanță cu rezultatele difracției cu raze X,

— proba notată cu 4, care se află în domeniul soluțiilor solide din sistem, prezintă un maxim care ar putea fi legat de structura magnetică din sistem [1].

BIBLIOGRAFIE

- [1] Scharenberg W., Berichte der Kernforschungsanlage Jülich, 611 RX, 1969.
- [2] Cristea M., Bul. Șt. și Tehn. IPT, seria Matem.-Fiz.-Mec., 1974, 19 (33), p. 153.
- [3] Rosenberg M., Proprietăți magnetice ale corpului solid, Ed. did. și ped., București, 1963, p. 116.
- [4] Steinwehr T.E., Z. Kristallogr., 1967, 125, p. 377.
- [5] Keith K.L., J. Amer. Ceram. Soc. 1954, 37, p. 490.

MAGNETIC SUSCEPTIBILITY IN THE SYSTEM OF THE ISOMORPHOUS OXIDES



(SUMMARY)

In this paper the magnetic susceptibilities of 26 samples from the ternary system of the metallic isomorphous oxides $\alpha\text{Fe}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3\text{—Cr}_2\text{O}_3$ are presented. These samples have been obtained by the interaction of the oxides at 1 250 °C in air, and slow cooling at room temperature.

The measurements performed by a slightly modified Gouy method led to the values of the molar susceptibility χ_M .

The representation of χ_M against the magnetic dilution shows several maxima. Three of these maxima are placed on the limit of the miscibility gap.

CONSIDERAȚII ASUPRA MECANISMELOR ELEMENTARE DE MODIFICARE A STĂRII MAGNETICE REFLECTATE ÎN CURBA $\chi_m = f(H)$

DE

C. DE SABATA, C. MARCU, A. KUN, A. HUSCHITT, M. GORGAN, G. HAIM

Studiul proprietăților magnetice ale unor plăci groase (100—450 μm) din aliajul electrolitic de 90% Co 10% Ni [1] ne-a condus la obținerea unor curbe ale susceptibilității magnetice χ_m în funcție de intensitatea cîmpului magnetic H în care proba a fost introdusă, de o formă particulară. În fig. 1 sînt prezentate curbele $B = f(H)$ și $\mu_r = f(H)$ pentru o probă cu grosimea de 450 μm depusă pe cupru.

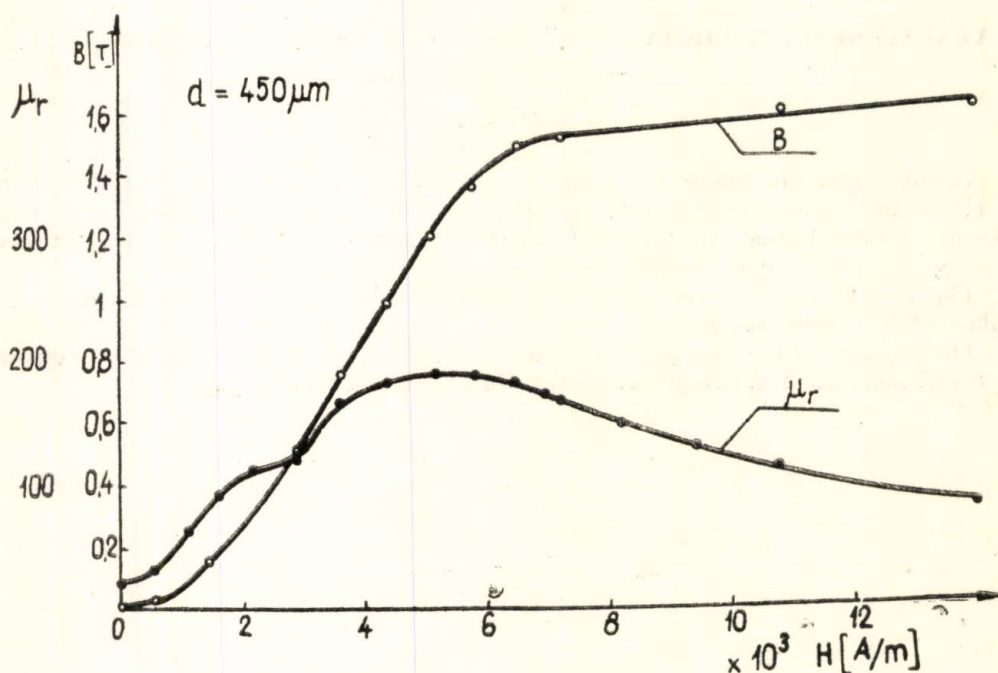


Fig. 1 Curbele $B = f(H)$ și $\mu_r = f(H)$ pentru proba de Ni-Co cu grosimea de 450 μm .

Alura particulară a curbei $\mu_r = f(H)$, care apare la toate probele avînd grosimea mai mare de 100 μm , — cu toată precauția luată de a nu se modifica pe parcursul electrolizei concentrația de ioni din baie — sugerează ideea unei separări mai nete, în acest caz, a celor două mecanisme elementare de modificare a stării magnetice, deplasările de pereți reversibile și ireversibile și rotațiile vectorilor de magnetizare spontană.

În general la introducerea feromagneticului în câmpul $\vec{H}$, variația magnetizației se poate scrie :

$$\delta M_H = M_S \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i d\Omega_i + M_S \sum_{i=1}^n \Omega_i \delta(\cos \varphi_i) \quad (1)$$

unde Ω_i sînt volumele elementare ale domeniilor Weiss iar φ_i unghiurile între vectorii $\vec{M}_S$ ai domeniilor și vectorul $\vec{H}$ [2]. Susceptibilitatea magnetică χ_m va fi dată de doi termeni :

$$\chi_m = \left(\frac{dM}{dH} \right)_d + \left(\frac{dM}{dH} \right)_r = \chi_d + \chi_r \quad (2)$$

respectiv permeabilitate magnetică :

$$\mu_r = 1 + \chi_d + \chi_r \quad (3)$$

Relațiile (2) și (3) scot în evidență contribuția deplasărilor de pereți Bloch și a rotațiilor vectorilor de magnetizare spontană (χ_d și χ_r).

Cele două mecanisme coexistă dar, pe rînd, în funcție de intensitatea câmpului $\vec{H}$, unul sau altul predomină.

Ne-am propus să stabilim dacă curbele $\mu_r = f(H)$ pot fi încadrate analitic și, în funcție de tipul de dependență obținut, să încercăm să delimităm contribuția unuia sau altuia din mecanismele elementare de modificare a stării magnetice.

Analiza curbelor $\mu_r = f(H)$, pentru grosimile indicate ale peliculei, ne-a permis să separăm în fiecare caz, trei curbe distincte, care prin suprapunere să dea curba experimentală. În fig. 2, 3 și 4 sînt redată : curbele experimentale și curbele calculate precum și expresiile analitice folosite în calcul.

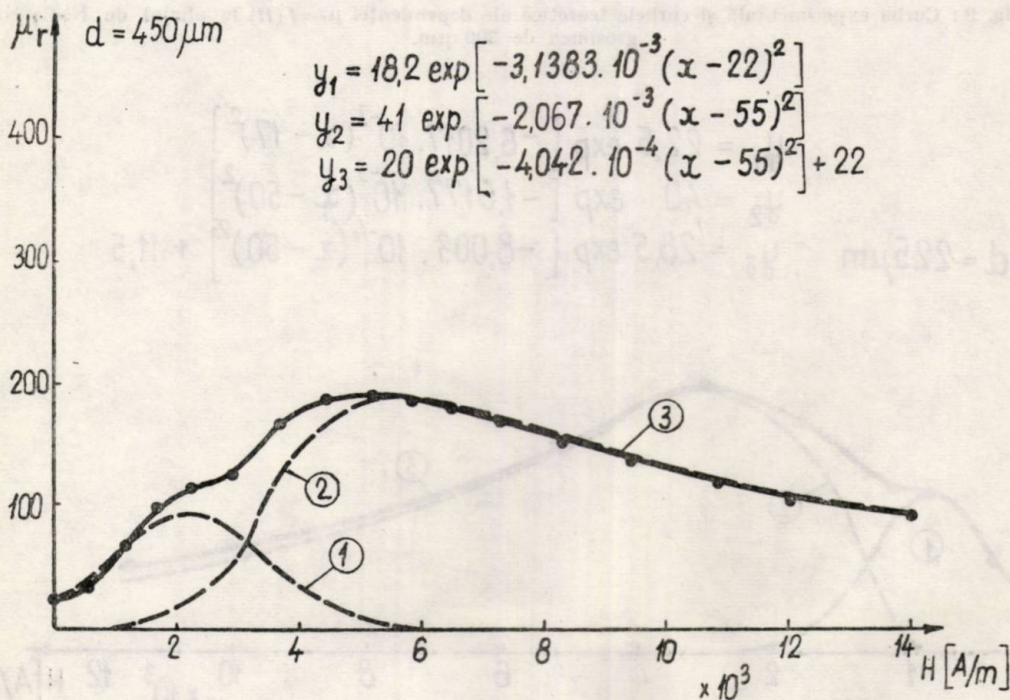


Fig. 2: Curba experimentală și curbele teoretice ale dependenței $\mu_r = f(H)$ la aliajul de Ni-Co cu grosimea de 450 μm .

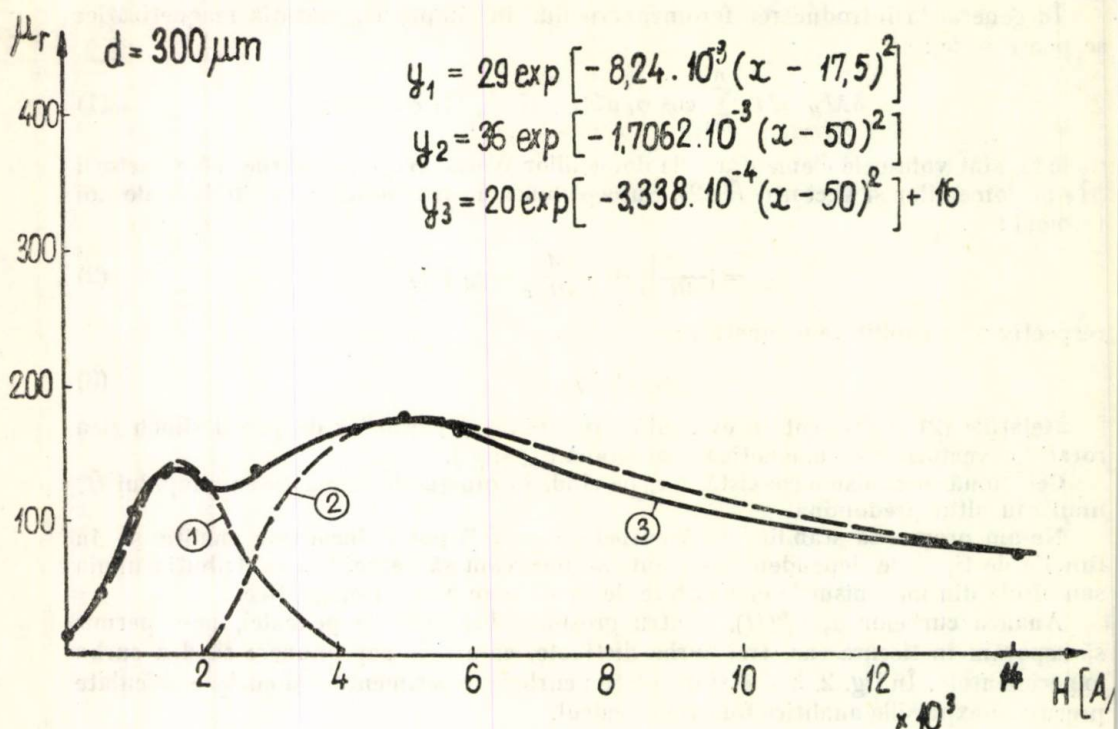


Fig. 3 : Curba experimentală și curbele teoretice ale dependenței $\mu_r = f(H)$ la aliajul de Ni-Co cu grosimea de $300 \mu\text{m}$.

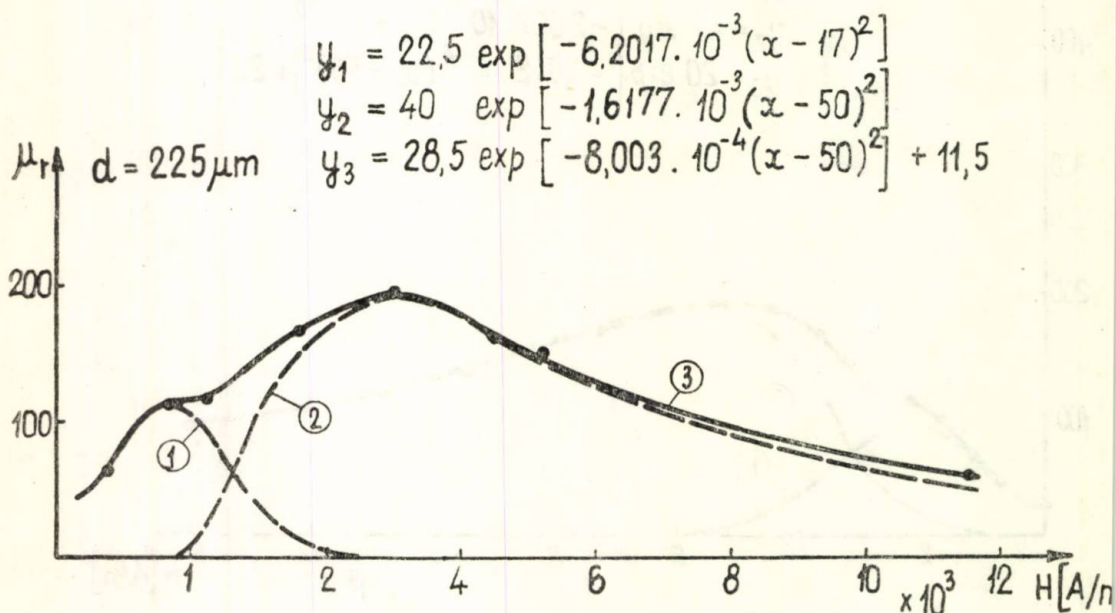


Fig. 4 : Curba experimentală și curbele teoretice ale dependenței $\mu_r = f(H)$ la aliajul de Ni-Co cu grosimea de $225 \mu\text{m}$.

În toate cazurile curba experimentală se desface în trei curbe de tip Gauss.

1. prima este o curbă completă de tip Gauss, cu expresia analitică de forma :

$$y_1 = A_1 \exp [-\beta_1 (x - C_1)^2] \quad (4)$$

și se situează în principal pe domeniul Rayleigh, maximul ei corespunzând acelei porțiuni de pe curba fundamentală de magnetizare unde deplasările ireversibile de pereți încep să ia locul deplasărilor reversibile.

2. diferența între curba experimentală și curba 1 ne-a permis să obținem curba y_2 pe care a trebuit să o despărțim în două ramuri ce se racordează în punctul de maxim comun și care coincide cu maximul principal al curbei experimentale. Expresiile analitice sînt de forma :

$$y_2 = \begin{cases} A'_2 \exp [-\beta'_2 (x - C_2)^2] \\ A''_2 \exp [-\beta''_2 (x - C_2)^2] + D''_2 \end{cases} \quad (5)$$

Constantele C_1 , C_2 au fost determinate din amplasarea punctului de maxim pe axa absciselor $C_1 = \chi_1$ și $C_2 = \chi_2$ iar constanta D''_2 a fost dată de μ_r la saturație, întrucît aici curba y_2 trebuie să tindă nu spre zero ci spre valoarea de saturație a permeabilității magnetice relative.

Coefficienții A și B au fost determinați prin metoda regresiei conform expresiilor :

$$A = \exp \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \ln y_i - \sum_{i=1}^m x_i^4 \sum_{i=1}^m \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^2 - m \sum_{i=1}^m x_i^4} \quad (6)$$

$$B = \exp \frac{m \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \ln y_i - \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^2 - m \sum_{i=1}^m x_i^4}$$

unde m este numărul de puncte experimentale folosite iar (x_i, y_i) sînt coordonatele acestor puncte față de sistemul de coordonate local ales pentru fiecare ramură de curbă în parte.

Analizînd amplasarea celor trei porțiuni de curbe de tip Gauss pe curba fundamentală de magnetizare $B = f(H)$ se observă :

a) prima curbă descrie în principal deplasările reversibile ale pereților Bloch ; maximul ei este situat în zona în care încep deplasările ireversibile ; tinzînd spre zero, ea se anulează în zona ce corespunde punctului de inflexiune de pe curba fundamentală.

b) ramura ascendentă ce corespunde celei de a doua curbe Gauss se situează în principal în zona deplasărilor ireversibile ale pereților Bloch atîngînd maximul cu puțin înainte de începutul cotului superior al curbei fundamentale. Ea nu poate cuprinde procese de rotații decît în măsură cu totul neglijabilă.

c) ramura a treia se instalează odată cu rotațiile vectorilor de magnetizare spontană menținîndu-se pînă la saturație.

Se poate în acest fel să se exprime dependența permeabilității magnetice μ de intensitatea cîmpului H în care este introdusă proba prin :

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_{a_{rev}} + \chi_{a_{irrev}} + \chi_{rot}) \quad (7)$$

unde fiecare termen este funcție de $\bar{H}$, dar are un domeniu de existență bine precizat.

Posibilitatea oferită de încadrarea analitică a curbelor experimentale arată că de fapt cele trei mecanisme elementare sînt destul de distincte și chiar dacă există zone ale intensității cîmpului $\vec{H}$ cînd două mecanisme coexistă, ele par a se desfășura cuasi-independent.

BIBLIOGRAFIE

- [1] C. De Sabata, C. Marcu, Remarks an the concept of both layer and bulk material concerning the ferromagnetic body, Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau, 1977
- [2] S. V. Vonsovski, Magnetism Isdatelstvo „Nauka“, Moskva (1971).

CONSIDÉRATIONS CONCERNAND LES MÉCANISMES ÉLÉMENTAIRES DE MODIFICATION DE L'ÉTAT MAGNÉTIQUE CONTENUS DANS LA DÉPENDENCE

$$\chi_m = f(H)$$

RÉSUMÉ

L'étude expérimental des propriétés magnétiques des couches épaisses de 90% Co 10% Ni a indiqué une allure particulière de $\chi_m = f(H)$.

Les courbes expérimentales ont été encadrées du point de vue analytique dans trois branches de type Gauss. On peut ainssi exprimer la perméabilité magnétique par :

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_{a_{rev}} + \chi_{a_{i_{rev}}} + \chi_{rot}).$$

Chaque branche ayant un domain d'existence bien précisé

ANALIZA CONTRIBUȚIEI EFECTULUI DE SERĂ SIMPLU ȘI DUBLU LA OPTIMIZAREA FUNCȚIONĂRII UNUI INSOLATOR PLAN

DE

COLETA DE SABATA, IOAN LUMINOSU

Literatura [de ex. 5, 6] tratează destul de amplu problema utilizării efectului simplu de seră dar în condiții parțial idealizate, fără să țină seama de situațiile concrete de exploatare pentru care este construit un insolator plan.

Întrucât utilizarea energiei solare ridică mai ales problema investiției inițiale, ne-am propus să analizăm eficiența introducerii efectului dublu de seră, folosind în acest scop un model teoretic și comparând rezultatele calculelor cu cele experimentale obținute pe un microinsolator din laboratorul nostru de heliotehnică.

Modelul teoretic a fost construit în baza ipotezelor :

— constanța fluxului de energie solară pe intervalul studiat (893 w/m² între orele 9—15, la 1 septembrie pe zi clară, cu cer senin, atmosferă uscată și nepoluată [1, 3]).

— funcționarea microinsolatorului a fost urmărită, în zile care îndeplineau condițiile anterioare, fără efect de seră, cu efect simplu sau dublu folosind plăci din sticlă de 4,3 mm grosime și ecartament între straturi de 7 mm ; incidența a fost normală.

Ecuția echilibrului energetic pentru o placă iradiată este [2] :

$$E_a = E_u + E_p \quad (1)$$

unde

$$E_a = A \Phi_i S_i d\tau \text{ — energia absorbită în } d\tau$$

$$E_u = m \cdot c \cdot dT = \rho S \cdot h \cdot c \cdot dT \text{ — energie utilă}$$

$$E_p = C_0 S_p (T - T_0) d\tau \text{ — energia pierdută în } d\tau$$

unde A este coeficientul de absorbție, Φ_i fluxul incident, S_i și S_p suprafețele iradiată și de pierderi, C_0 conductanța în W/m² °K T — temperaturi, τ — timp, celelalte mărimi având semnificații obișnuite și fiind date în unități SI. Ec (1) se poate scrie :

$$A \Phi_i S_i d\tau = \rho S \cdot h \cdot c \cdot dT + C_0 S_p (T - T_0) d\tau \quad (2)$$

care conduce la :

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{A S_i \Phi_i}{C_0 S_p} \left[1 - \exp \left(- \frac{C_0 S_p \tau}{\rho \cdot S \cdot h \cdot c} \right) \right] \quad (3)$$

Ec. (3) redă evoluția în timp a încălzirii mediului fluid din insolator în raport cu temperatura T_0 a mediului ambiant ; se observă că valoarea teoretică pentru

$$(\Delta T)_{max} = \frac{A S_i \Phi_i}{C_0 S_p} \quad (4)$$

depinde de fluxul incident dar și de parametrii constructivi ai insolatorului.

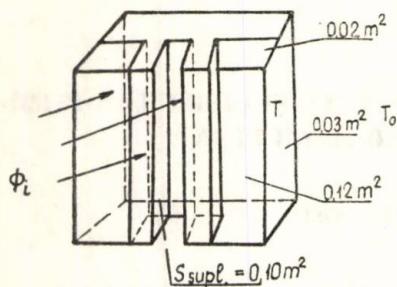


Fig. 1. Structura insolatorului folosit.

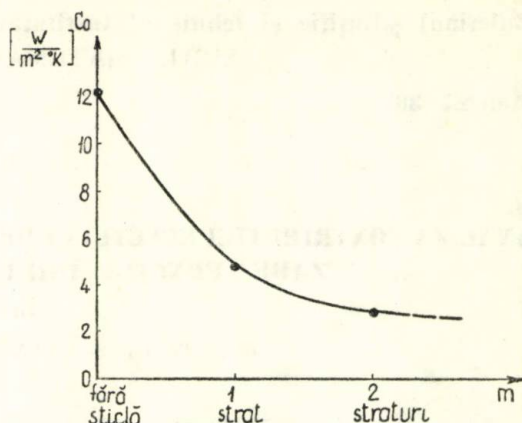


Fig. 2. Dependența conductanței de numărul straturilor de sticlă.

Conductanța s-a determinat experimental după [4] urmărind în timp răcirea mediului din insolator, la umbră; ea a fost calculată din :

$$C_0 = \frac{(m_a + m_e) c \cdot \Delta T}{\tau' \cdot S_p \cdot \Delta T'} \quad (5)$$

unde : m_a : masa apei

m_e : echivalentul în apă al rezervorului

ΔT : variația de temperatură a fluidului

$\Delta T'$: diferența între temperatura fluidului și a mediului ambiant

τ' : timpul asociat lui $\Delta T'$

Pentru cele trei variante de funcționare a insolatorului s-au găsit :

$C_{01} = 12,3 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$ — insolator simplu

$C_{02} = 4,79 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$ — insolator cu efect de seră simplu

$C_{03} = 2,9 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$ — insolator cu efect dublu de seră

Variația conductanței prezentată în fig. 2 arată că : pierderile se datoresc în principal radiației prin fața anterioară (celelalte sînt bine izolate cu vată minerală și carcasă de lemn) dar curba tinde rapid spre un palier.

Ecuția (3) se poate scrie :

$$\Delta T = (\Delta T)_{max} (1 - e^{-k\tau}) \quad (7)$$

unde $(\Delta T)_{max}$ este dat de (4) iar $k = \frac{C_{01} S_p}{\rho \cdot S \cdot h \cdot c}$. Am ales pentru „pasul de timp” intervalul de 900 s și atunci $k\tau = k \cdot n \cdot 900 = \sigma \cdot n$ unde $n \in [1, 24]$ și (7) devine :

$$\Delta T = (\Delta T)_{max} (1 - e^{-\sigma \cdot n}) \quad (7')$$

avînd valorile experimentale $A = 0,92$, $S_i = 0,12 \text{ m}^2$, $\Phi_i = 893 \text{ W/m}^2$, $S_p = 0,44 \text{ m}^2$ din (7') se obține pentru insolatorul fără efect de seră :

$$\Delta T = 18,21 (1 - e^{-0,254 \cdot n}) \quad (8)$$

curba teoretică prezentată în fig. 3 prin comparație cu determinările experimentale pentru aceleași mărimi. Se observă buna concordanță teoretică și experimentală.

În cazul insolatorului cu efect simplu de seră, primul factor al ecuației (3) trebuie completat la forma

$$\frac{A \cdot S_i \Phi_i \alpha}{C_{02} S_p}$$

unde α este factorul mediu de transparență a sticlei ($\alpha=0,77$) și, utilizînd valoarea corespunzătoare pentru conductanță se obține :

$$\Delta T = 36,14 (1 - e^{-0,0389 \cdot n}) \quad (8')$$

iar pentru insolatorul cu efect dublu se introduce factorul α^2 și conductanța corespunzătoare C_{03} și obținem :

$$\Delta T = 45,8 (1 - e^{-0,0598 \cdot n}) \quad (8'')$$

În fig. 3 sînt prezentate curbele teoretice și experimentale pentru toate trei cazuri.

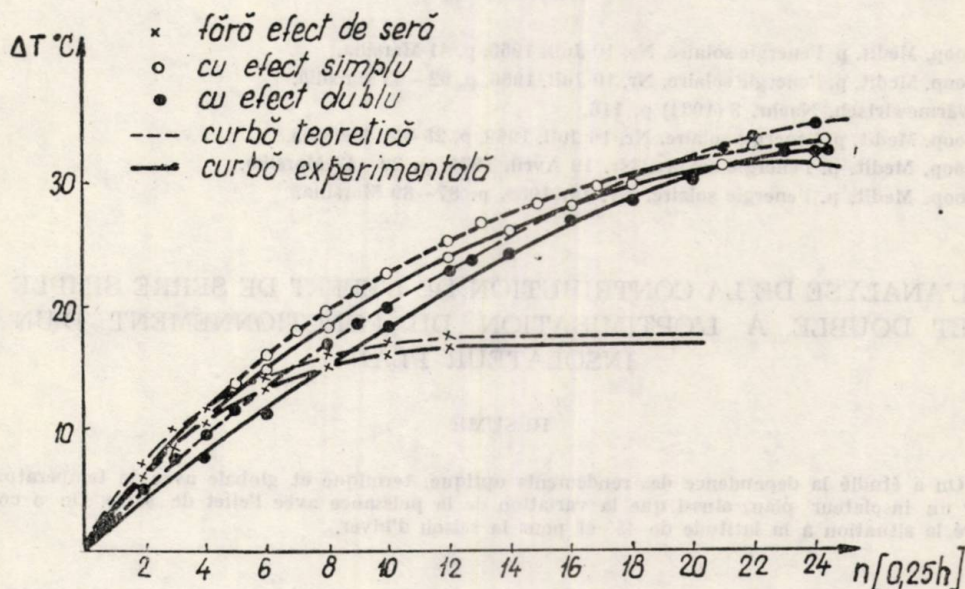


Fig. 3. Curbe teoretice și experimentale de încălzire a mediului de lucru în timp.

Analiza lor arată că : prezența plăcilor de sticlă reduce pierderile de la 100% la 38,9% pentru o placă și la 23,57% pentru două plăci dar, în același timp, fluxul absorbit de agentul din insolator scade de la 100% la 77% și respectiv 59,29%, reducerea relativă a fluxului util fiind mai mică decît reducerea relativă a pierderilor (fig. 4).

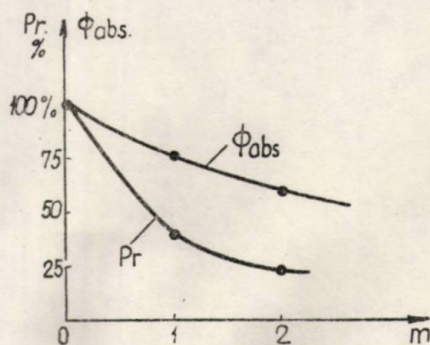


Fig. 4. Influența numărului de straturi de sticlă asupra mărimilor : Φ_{abs} și a pierderilor de căldură P_{rel} .

Apar însă și două dezavantaje : primul se referă la scumpirea și îngreunarea insolatorului cu dublu efect de seră, ceea ce în cazul unor suprafețe mari, plasate pe acoperiș, poate să fie prohibitiv și al doilea, la reducerea pantei în origine a curbelor de încălzire (0,25 grd/min, 0,21 grd/min, 0,13 grd/min) ceea ce evidențiază o creștere mult mai lentă a temperaturii în insolatorul cu efect dublu de seră față de cel cu efect simplu.

În cazul captatoarelor solare din zone temperate unde, cu excepția verii, durata de insolație este și așa destul de scurtă, acest timp de răspuns lung al instalației poate de asemenea să fie un inconvenient important.

Se conturează astfel cu claritate concluzia că în cazul zonei temperate cel mai bine convin insolatoarele plane cu efect simplu de seră și cu o bună izolație pe fețele inactive.

BIBLIOGRAFIE

- 1 Coop. Medit. p. l'énergie solaire, Nr. 10 Jull. 1966, p. 41 Marsilia.
- 2 Coop. Medit. p. l'énergie solaire, Nr. 10 Jull. 1966, p. 92—93 Marsilia.
- 3 Wärmewirtsch. Nachr. 8 (1934) p. 116.
- 4 Coop. Medit. p. l'énergie solaire, Nr. 16 Jull. 1969, p. 25—26 Marsilia.
- 5 Coop. Medit. p. l'énergie solaire, Nr. 19 Avril, 1971, p. 39—43 Marsilia.
- 6 Coop. Medit. p. l'énergie solaire, Nr. 14, 1968, p. 87—89 Marsilia.

L'ANALYSE DE LA CONTRIBUTION DE L'EFFET DE SERRE SIMPLE ET DOUBLE À L'OPTIMISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN INSOLATEUR PLAN

RÉSUMÉ

On a étudié la dependance des rendements optique, termique et globale avec la température, pour un insolateur plan, ainsi que la variation de la puissance avec l'effet de serre. On a considéré la situation à la latitude de 45° et pour la saison d'hiver.

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA”
TIMIȘOARA
SERIA MATEMATICĂ — FIZICĂ

Tom 24 (38)

Fascicola 2

IULIE-DECEMBRIE

1 9 7 8

COLEGIUL DE REDACȚIE

- Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON,
- Conf. dr. ing. GHEORGHE CREȚU,
- Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef,
- Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R.
- Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU
- Prof. dr. ing. VASILE COCHECI
- Prof. dr. BORISLAV CRSTICI
- Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
- Prof. dr. ing. TOMA DORDEA
- Conf. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ
- Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS
- Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU
- Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN
- Conf. dr. ing. IOAN NIȚĂ
- Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII
- Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA
- Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

COMITETUL DE REDACȚIE

I. Matematică-Fizică

- Prof. dr. BORISLAV CRSTICI -- redactor responsabil
- Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
- Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — redactor responsabil adj.
- Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU
- Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA” TIMIȘOARA

Tomul 24 (38)

Fascicula 2

Iulie-Decembrie 1978

MATEMATICĂ—FIZICĂ

1. N. BOJA, GEORGETA BRAILOIU : Despre simplexele autopolare și mișcările spațiilor neeuclidiene	65
2. T. BINZARU : Asupra C-topologiei spațiului părților	72
3. CARMENCITA UROSU : Asupra independenței claselor ecuaționale ale algebrelor universale	77
4. B. RENDI, A. TRANDAFIR : Topologii pentru grupuri abeliene complete ...	81
5. A. FILIPESCU, GH. BABESCU : Cîteva proprietăți generale ale soluțiilor ecuației funcționale a cosinusului	83
6. O. LIPOVAN : Suporturile topologice ale măsurărilor de probabilitate gaussiene în subspații ale spațiului măsurilor reale și mărginite ...	88
7. O. LIPOVAN : Măsurile de probabilitate gaussiene, în subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite	92
8. O. SLIMAC : Dezvoltarea unei funcții olomorfe H după puterile crescătoare ale unui polinom dat	96
9. O. SLIMAC : Asupra unei ecuații funcționale ciclice pentru o funcție vectorială	99
10. DORINA, RENDI, B. RENDI : Despre reprezentarea grupului $GL(n, R)$ în grupul $End(R_n^p) \approx GL(C_n^p, R)$	101
11. B. RENDI : Despre structura de latice a algebrelor universale cu operații infinite	104
12. F. KLEPP : Asupra unor aplicații ale spațiilor Finsler în tehnică	106
13. A. FILIPESCU : Asupra unui sistem de ecuații funcționale	109
14. ȘT. MATEI : Interpolarea funcțiilor de mai multe variabile cu ajutorul calculatorului electronic	111
15. COLETA DE SABATA, I. LUMINOSU : Aspecte teoretice și experimentale în studiul randamentului unui convertor heliotermic	113
16. B. F. ROTHENSTEIN, B. GAVRA : Problema celui de al treilea observator inerțial în diagrama Amar	117
17. B. F. ROTHENSTEIN, A. BUDURA, T. BUDURA : Mișcările accelerate în diagrama Amar	120
18. MINERVA CRISTEA : Proprietăți feromagnetice în sistemul de oxizi $Fe_2O_3-BaO-B_2O_3-Na_2O$	122

BULETIN SCIENTIFIC ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA“ TIMIȘOARA

Tome 24 (38)

Fascicule 2

Juillet-December 1978

MATHÉMATIQUE—PHYSIQUE

1. N. BOJA, GEORGETA BRAILOIU : On the self-polar simplexes and the movements of the non-euclidean spaces	65
2. T. BINZARU : Über die C-Topologie des Teil-Raumes	72
3. CARMENCITA UROSU : Über die Unabhängigkeit der Gleichungsklassen der Universellen Algebren	77
4. B. RENDI, A. TRANDAFIR : Topologien für komplette Abelsche Gruppen	81
5. A. FILIPESCU, G. BABESCU : Quelques propriétés générales des solutions de l'équation fonctionnelle du cosinus	83
6. O. LIPOVAN : Les supports topologiques des mesures gaussiennes de probabilité dans les sous espaces de l'espace des mesures réelles et bornées	88
7. O. LIPOVAN : Mesures gaussiennes de probabilité dans les sousespaces de l'espace de Banach des mesures réelles et bornées	92
8. O. SLIMAC : Développement d'une fonction holomorphe H d'après les puissances croissantes d'un polynôme donné	96
9. O. SLIMAC : Sur une équation fonctionnelle cyclique pour une fonction vectorielle	99
10. DORINA RENDI, B. RENDI : Sur la représentation du groupe $GL(n, R)$ dans le groupe $End(R_n^{CP}) \approx GL(C_n^P, R)$	101
11. B. RENDI : Über die Lattice-Struktur der universellen Algebren mit infinitären Operationen	104
12. F. KLEPP : Über die Anwendungen der Finslerräume in der Technik	106
13. A. FILIPESCU : Sur un système des équations fonctionnelles	109
14. ȘT. MATEI : L'Interpolation des fonctions des plusieurs variables à l'aide du calculateur électronique	111
15. COLETA DE SABATA, I. LUMINOSU : Theoretische und experimentelle Aspekte bei der Untersuchung des Wirkungsgrades eines heliothermischen Umwandlers	113
16. B. F. ROTHENSTEIN, B. GAVRA : The problem of the third inertial observer in the Amar diagram	117
17. B. F. ROTHENSTEIN, A. BUDURA, T. BUDURA : Accelerated movements in the Amar diagram	120
18. MINERVA CRISTEA : Ferromagnetische Eigenschaften im Vierstoff-System $Fe_2O_3-BaO-B_2O_3-Na_2O$	122

ON THE SELF-POLAR SYMPLEXES AND THE MOVEMENTS OF THE NON-EUCLIDEAN SPACES

BY

N. BOJA and G. BRAILOIU

0. INTRODUCTION

Let K be a numerical field (i.e. a sub-field of C).

In [1] and [2] we have defined, by an algebraic method, the non-euclidean K -space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ of n dimension, of index l ($\leq n$) and of constant curvature $1/\rho^2$, where $\rho \in C_v$ -who is an algebre of second order over K ([3]) in the basis $\{1, v\}$ and having the minimal polynom $\varphi(t) = t^2 - q \in K[t]$. For the sake simplification was stated that $\rho = v$ or $\rho = v'$ ($v' = v/\sqrt{-1}$).

In this part we shall explain shortly this method.

We shall consider a pseudo-euclidean linear K -space, denoted $V_l^{n+1}(q) \doteq V$ with metrical structure definite of nondegenerated symmetrical bilinear form

$$\langle X, Y \rangle_f = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i x^i y^i - q x^{n+1} y^{n+1}, \quad (X, Y \in V)$$

with $\varepsilon^i = +1$ ($i \leq l$) and $\varepsilon^i = -1$ ($i > l$).

In V is an equivalence relation with classes $C_X = \{-X, X\}$ introduced ([2], p. 33).

By the isometric mapping $X' \rightarrow x$ ($X' \in C_X$) of V in $\mathfrak{V}_l^n(q) \doteq \mathfrak{V}$ for which

$$\langle X', X' \rangle_f = \langle x, x \rangle_N \doteq \sum_N (x^i)^2, \quad (*)$$

to every point x of the non-euclidean space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ are corresponding two representatives X and $-X$ in V .

The norm condition for the points of $\mathfrak{V}$ is

$$\langle x, x \rangle_N = \rho^2.$$

In relation to the selection of ρ , of the natural number l and of the number $q \leq 0$, diverse types elliptical or hyperbolical non-euclidean spaces are obtained.

Let ${}_K K^{n+1}$ be a pseudo-euclidean space over K with bilinear form

$${}_K b^{n+1}(x, y) = - \sum_{\alpha=1}^K x^\alpha y^\alpha + \sum_{\beta=K+1}^{n+1} x^\beta y^\beta, \quad (x^i, y^i \in K; i = \overline{1, n+1}).$$

Thus V , considered already, will be ([4], 1°) linear-isometric with ${}_K K^{n+1}$ for $k = n - l + 1$. Writing $\varepsilon = \pm 1$; for the natural number (positive integer) $k \leq n$ (where

$n \geq 2$), we define $k' = k - 1$ if $\varepsilon = +1$ and $k' = k$ if $\varepsilon = -1$; let $B = \{e_i\}$ ($i = \overline{1, n+1}$) be an orthonormal basis of the ${}_k K^{n+1}$ space.

Because, from the statement made, $\rho^2 \in K$, let $r > 0$ be a number so as to have $\varepsilon r^2 = \rho^2$.

Considering now the hypersurface

$$Q = \{x' \in {}_k K^{n+1} : {}_k b^{n+1}(x', x') = \varepsilon r^2, r > 0\},$$

the space ${}_k K^{n+1}$ (which is, according to the Theor. 2.4.3 [10], a pseudo-riemannian manifold and, moreover, complete and simply connected if $K = R$) induces a pseudo-riemannian metric in this. The choice of the basis is so that we have $x' = r e_{n+1}$. With this metrics Q is an n -dimensional pseudo-riemannian manifold of constant sectional curvature, εr^{-2} (acc. to [10], Theor. 2.4.4).

If $k = 1$, the non-euclidean space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ will be local-isometric with Q , according to the selection of $\varepsilon = +1$, if $v^2 = q < 0$ or with Q , according to the selection of $\varepsilon = -1$, if $v^2 = q > 0$. From here and on the basis of Theor. V.3.1 [6], there results that $\mathfrak{V}_l^n(q)$ is a riemannian space with constant curvature $1/-q$, that is a positive constant in the first case and negative in the second one. These two situation are corresponding, acc. to the definition given in [1], p. 782, to the $\mathbb{S}^n(q)$ and $\mathbb{L}^n(q)$ space respectively to the elliptical and hyperbolic space. For $q < 0$, $\mathbb{S}^n(q)$ is isometric with a hypersphere Q of $\sqrt{-q}$ radius from K^{n+1} the diametrically opposed points of which were identified. For $q > 0$, $\mathbb{L}^n(q)$ will be isometric with Q of imaginary radius $\sqrt{-q}$ of ${}_1 K^{n+1}$, the diametrically opposed points of which were also been identified.

If $k \neq 1$, the fact will be similarly established that the space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ ($l = n - k + 1$), having $\rho = v'$ or $\rho = v$ curvature radius is a pseudo-riemannian space of $1/-q$ or $1/q$ sectional curvature. But, according to the selection of v , this represents respectively one of the non-euclidean spaces $\mathbb{S}_+^n(q)$ ($q < 0$), $\mathbb{H}_-^n(q)$ ($q > 0$) or $\mathbb{S}_-^n(q)$ ($q < 0$), $\mathbb{H}_+^n(q)$ ($q > 0$). They are isometric with the Q which is a hypersphere of real or imaginary radius from ${}_{k-1} K^{n+1}$ or ${}_k K^{n+1}$, respectively, having the diametrically opposed points identified.

1°. Simplexes in non-euclidean spaces.

A number of s points a_i of $\mathfrak{V}_l^n(q) \doteq \mathfrak{V}$ are linear-independent if their representatives A_i in $V_l^{n-r+1}(q) = V$ have this property.

Let us consider $\{a_i\}_{m+1}$ a system of $m+1$ linear-independent in $\mathfrak{V}$.

1.1. Definition. A simplex m -dimensional in $\mathfrak{V}_l^n(q)$, with tops a_i ($i = \overline{1, m+1}$) is the set $\sum^m$ of points

$$x = t^1 a_1 + \dots + t^{m+1} a_{m+1} \quad (1)$$

satisfying the conditions

$$t^i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m+1}) \quad (2.a)$$

and

$$\langle X, X \rangle_f = \rho^2 \quad (2.b)$$

where ρ is the curvature radius of the non-euclidean space $\mathfrak{V}$, X - the representative of the points x from $\mathfrak{V}$ in the associated R -space V , and f the bilinear form which defines the metric structure of the last.

It is said that $\sum^m$ is the simplex generated by the points $a_1, \dots, a_{m+1}$.

It follows that in $\mathfrak{V}_l^n(q)$ the maximal simplex is $\sum^n$, because we can consider $n+1$ linear independent points which must not belong to a hyperplane of this space.

In the preceding affirmations we have, therefore, $m \leq n$.

If in (2.a) we have at least an equality then, x belongs to the frontier of the simplex.

1.2. Remark. Each point $x \in \sum^m$ may be obtained by means of the identification of the diametrically opposed points of a hypersphere of the pseudo-euclidean space ${}_k R^{m+1}$, so that at least one of this must belong to a $m -$ spherical simplex ([8], p. 244).

By $\Delta^m = \{\tilde{x}\}$ we shall note the standard simplex in ${}_k R^{m+1}$, considered as a metric space with the metric induced from that of the pseudo-euclidean space.

1.3. Definition. A *standard pseudo-spheric simplex* $m -$ dimensional in ${}_k R^{m+1}$ is the set Δ_N^m of elements $(x^1, x^2, \dots, x^{m+1})$ satisfying the conditions

$$x^i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m+1}) \quad (2.a')$$

and

$$\Sigma_N (x^i)^2 = \rho^2 \quad (2.b')$$

where Σ_N represents a sum of the same form as the left part of each conditions of normalizing for different types of non-euclidean $m -$ dimensional spaces.

1.4. Remark. A standard pseudo-spheric simplex Δ_N^m is obtained from Δ^m replacing the ordinary condition $\sum_{i=1}^{m+1} x^i = 1$, with that indicated above (2.b').

Let us consider the space ${}_k R^{n+1}$ endowed with the natural topology $\mathfrak{F}$. If $\mathfrak{V}_l^n(q)$ is one the non-euclidean spaces considered above and Q its model in ${}_k R^{n+1}$ ($k' = n - l + 1$), then the intersections of the open sets belonging to $\mathfrak{F}$ with Q are corresponding open sets on $\mathfrak{V}_l^n(q)$ by the map $\mathfrak{U}$, which attaches to every point of the model the correspondind point of the non-euclidean space represented ([4], 2°, Theor. 1), so that together with the point $x' = (x^i)_{n+1} \in Q$ having as image the point $x = (x^i)_{n+1} \in \mathfrak{V}_l^n(q)$ it has the some image $-x'$ as well, whose coordinates differ by sign from those of the point x' . Then the family $\mathfrak{F}_V \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{V}_l^n(q))$, which consists of all the sets $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}_l^n(q)$, the preimage of which $\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{U}) \in \mathfrak{F}_Q$ is a topology on $\mathfrak{V}_l^n(q)$.

1.5. Remark. The simplex Δ_N^m has the metric structure defined by that of the $m -$ dimensional $\mathfrak{V}_l^m(q)$ non-euclidean space for which Q represents a model in ${}_k R^{m+1}$, because we have the inclusion $\Delta_N^m \subset Q$, and it was established ([4], 2°) a local isometry $({}_k b^{m+1}(x', x') = \langle x, x \rangle_N, k' = m - l + 1)$ between this hypersurface and the non-euclidean space corresponding to the map

$$\mathfrak{U} : (Q, \mathfrak{F}_Q) \rightarrow (\mathfrak{V}_l^m(q), \mathfrak{F}_V)$$

described above.

1.6. Lemma. It exist a homeomorphism of the pseudospheric simplex Δ_N^m on $\Delta_0^m := \Delta^m - \Gamma$, where

$$\Gamma : \Sigma_N (x^i)^2 = 0$$

is the asimthotic cone (real or imaginary) of the Q hypersurface in ${}_k R^{m+1}$.

This is given by the map

$$\xi : \Delta_0^m \rightarrow \Delta_N^m$$

defined by the relation

$$x^i = \tilde{\rho} \tilde{x}^i / (\sum_N (\tilde{x}^i)^2)^{1/2}, \quad \text{with } \sum_{i=1}^{m+1} \tilde{x}^i = 1, \quad (3)$$

which is continuous on Δ_0^m , so that the inverse function ξ^{-1}

$$\tilde{x}^i = x^i / \sum_{i=1}^{m+1} x^i, \quad \text{with } \sum_N (x^i)^2 = \rho^2 \quad (4)$$

is also continuous on Δ_N^m , both being constituted from $2(m+1)$ fractions with non-null denominations in each point belonging to Δ_0^m respectively Δ_N^m , case which may be checked up easily from the conditions of definition of the two simplexes. The bijectivity of the mapping is obvious. The open sets of the topologic space Δ_N^m are images through the map ξ of the open sets from Δ_0^m .

Considering that the simplexes Σ^m are orientate, to say the set $\sigma = \{a_i\}_{m+1}$ of the tops is totally ordered, and two simplexes having the same tops, but in another order are different, a face of p dimension is the set $\sum_{i_1, \dots, i_{m-p}}^m (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-p} \leq m+1)$ of points (1) so as in the conditions (2.a') to have $x^{i_1} = \dots = x^{i_{m-p}} = 0$; the number of the faces of the same dimension is $\binom{m+1}{p+1}$, and the points o , each of them are situated in the points a_{j_α} , with $j_\alpha \neq i_1, \dots, i_{m-p}$ and $\forall \alpha = 1, \dots, p!$ $j_{\alpha+1} > j_\alpha$.

1.7. Theorem. The faces $\sum_{i_1, \dots, i_{m-p}}^m$ of the Σ^m are them itself p -dimensional non-euclidean simplexes, and noting $\bigcup_{p \leq m} \Sigma^p = \dot{\Sigma}^{m+1}$, this represents the frontier of a simplex Σ^{m+1} ($m \leq n-1$).

The first part is evident, because $\forall x \in \sum_{i_1, \dots, i_{m-p}}^m$ is satisfying the conditions (2.a) in which we have at least $m-p$ equalities, so in (1) remain at the most $p+1$ nonnull terms; so, the respective face is a non-euclidean simplex of $\leq p$ dimension. But as its tops are situated in the points a_j (in number of $p+1$), according to the 1.1. Def., it results that $\sum_{i_1, \dots, i_{m-p}}^m$ has the dimension p .

In order to demonstrate the second part we shall use the 1.6. Lemma.

Considering the set σ of the tops of Σ^m as a singular simplex belonging to a simplicial complex $\mathcal{K}$, which has all the top elements from $\mathcal{V}_I^n(q)$.

We shall use an analogical construction with that given in [7], p. 148 concerning the linear simplexes.

For each element from Δ_N^m (having the same dimension with σ) is defined the map

$$\chi: x \in \Delta_N^m \rightarrow \chi(x) = y \in \Delta_N \sigma,$$

where

$$\Delta_N \sigma = \{(x, \sigma) \mid x = (x^1, \dots, x^{m+1}) \in \Delta_N^m, \quad \sigma \in \mathcal{K}\},$$

putting

$$y = \sum_{i=1}^{m+1} x^i a_i. \quad (5)$$

It is known the fact that an map of this form is a homeomorphism of the spaces Δ_0^m and $\Delta_0\sigma$. The composite of this with the map $\Delta_0\sigma \rightarrow \Delta_N\sigma$ is also a homeomorphism, because $\Delta_0\sigma$ and $\Delta_N\sigma$ are the product of two homeomorph spaces (acc. to the Lemma) with the same space σ . We note this homeomorphism by η .

So, the mapping χ presented above is a homeomorphism, because we have $\chi = \eta_0 \xi^{-1}$. In $\Delta_N\sigma$ we shall introduce a topology of which open sets are the images of the open sets of Δ_N^m through the homeomorphism χ or still belonging to the standard simplex Δ^m (from R^{m+1}) by the mapping $\chi_0 \xi$ restricted at Δ_0^m .

We note that, the point y to be interior for $\Delta_N\sigma$ it is sufficient for it to be image of a point x of the standard simplex, for which $x^i > 0$ ($i = \overline{1, m+1}$).

Having two given singular simplexes $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{K}$, with a non-empty intersection, the points $y \in \Delta_N\sigma$ and $y' \in \Delta_N\sigma'$ are considered as equivalent if their expressions (5) and

$$y' = \sum_{j=1}^{m'+1} x'^j a'_j, \quad (5')$$

coincide after neglecting the terms with null coordinates, so $x^j = x'^j$, if $a_j = a'_j \in \sigma \cap \sigma'$ ([7], p. 148). We shall note with $\mathfrak{R}$ this relation of equivalence.

By the identification of the points which are to be found in the same class of equivalence, $\Delta_N\sigma$ becomes a simplex $\mathfrak{S}_N \sigma$, and the topologic space $\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \Delta_N\sigma$ — a simplicial polyhedron $\mathfrak{S}_N$, associated to the complex $\mathfrak{K}$. The topology of the quotient space of $\mathfrak{S}_N$ is given by those sets for which the inverse images from $\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \Delta_N\sigma$ are open sets.

It is easily to observe that for σ choosen as above, coincides with $\mathfrak{S}_N\sigma$ from 1.1. Def., because $\Delta_N\sigma/\mathfrak{R}$ is homeomorph with $\Delta_N\sigma$, if σ is maximal in $\mathfrak{K}$.

But as each simplicial polyhedron is the reunion of the $(m-1)$ — dimensional faces of a m — dimensional standard simplex used in order to defined itself ([7], p. 164), this will represent the frontier of the respective simplex.

In our case, supposing that $\mathfrak{S}_N$ corresponds to a simplicial complex $\mathfrak{K}$ determined by $m+2$ independent points, and the singular simplexes, noted with σ , are all maximal in $\mathfrak{K}$, from this results that this simplicial polyhedron may be identified with $\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma^m$. On the other hand the elements σ of $\mathfrak{K}$ (and, therefore, the symple-

xes Σ^m) are in correspondence 1:1 with the m — dimensionale Δ_N^m faces of Δ_N^{m+1} , whose reunion constitutes the frontier of this symplex. According to the fact that to each element $\sigma' \in \mathfrak{K}$, of a smaller dimension, corresponds a face contained in at least one face Δ_N^m , we shall obtain the relation $\bigcup_{p \leq m} \Sigma^p = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma^m$.

So the theorem is demonstrated, because the right part of the preceding relation represents the polyhedron itself $\mathfrak{S}_N$.

1.8. Consequence. If $m=n$, then the $n+2$ points which determines $\mathfrak{K}$ are linear — dependent and it doesn't exist a non-euclidean simplex which has the property to admit them as tops, but we can define a simplicial polyhedron $\mathfrak{S}_N$ having maximal symplex faces Σ^n . According to the homeomorphism established between $\mathfrak{S}_N$ and $\mathfrak{S}_1^n(q)$ by the identity map the frontiers of the simplexes Σ^n in non-euclidean spaces determine a „triangulation“ of those of the last.

So that, in $\mathfrak{S}_2^2(q)$ or $\mathfrak{S}_1^2(q)$ such a triangulation is determined by the reunion of four non-euclidean triangle which coincide with the maximal simplexes Σ^2 .

2°. Self-polar Simplexes.

Let V_1 be a proper maximal subspace of V . Therefore, V_1 is a normal divisor of the V group, because K is commuting. In this case, for every $A \in V$ exists a canonic epimorphism $h: V \rightarrow V/V_1$ so that, when $V = V_1 \oplus V_2$, Where $V_2 = AK$ (which explains that $[V_1: K] = n$). The linear variety $h(A)$ will be a hyperplane (ortogonal to A), noted H_A .

In $\mathfrak{V}_l^n(q)$, the set $H_{aA} \cap \mathfrak{V}_l^n(q) \doteq S^{n-1}$, ($\alpha \in K$), will be a non-euclidean hypersphere with the centre a , if $|\alpha| \notin \{0, 1\}$ and if, moreover, the respective point satisfies the norm condition for the points of $\mathfrak{V}$, ([5], p. 36). For $\alpha \rightarrow 0$, S^{n-1} passes to limit in a non-euclidean hyperplane, called *polar hyperplane* of a , and written $[_a]S^{n-1}$, having all points „orthogonal“ to the a point.

2.1. Definition. An *self-polar frame* of a non-euclidean space is the set ${}_aR = \{e_i\}$ of $n+1$ points of $\mathfrak{V}_l^n(q)$ so as for each $j \neq i$ ($i, j = \overline{1, n+1}$) to have $e_j \in [_{e_i}]S^{n-1}$, where $[_{e_i}]S^{n-1}$ is the polar hyperplane of the point e_i .

2.2. Definition. An *self-polar simplex* is a non-euclidean simplex ${}_a\Sigma^n$ whose tops e_i ($i = \overline{1, n+1}$) define an self-polar frame ${}_aR$ of the space $\mathfrak{V}_l^n(q)$; ($\sigma = {}_aR$).

2.3. Remark. Each top of an self-polar simplex is the pole of a face which is itself a simplex (acc. to the 1.7. Theorem) of $n-1$ dimension ${}_a\Sigma^{n-1}$, to which this doesn't belong.

3°. The Movements of the Non-Euclidean Spaces.

Let note with G_N the group of movements of the non-euclidean space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ and with ${}_a\mathfrak{R}$ the omogen space of the self-polar frames of this. So, it is indifferent which will be two given frames ${}_aR$ and ${}_aR'$ from ${}_a\mathfrak{R}$, they both will have the same orientation, because these may be obtained one from another by the elements of the considered group which acts as a group of transformations in ${}_a\mathfrak{R}$, so it exist $g \in G_N$ in order to have ${}_aR' = {}_aR \cdot g$; the frame ${}_aR$ ($= {}_aR \cdot e$) corresponds to the e unit element of the group, and ${}_aR'$ is obtained from this according to the relation

$${}_aR \cdot g = \{T_g \cdot E_i\}_{n+1}.$$

Here T_g is the operator corresponding to the element g though the representation

$$\pi: G_N \rightarrow \text{Aut}_K V,$$

that is $\pi(g) = T_g$ and $V = V_l^{n+1}(q)$ is the space of the representation π .

Considering now, that the vectors E_i are representatives in V of the tops e_i of a self-polar simplex ${}_a\Sigma^n$ from $\mathfrak{V}_l^n(q)$, it results that in order to give a movement in $\mathfrak{V}$ it is sufficient to known the simplex ${}_a\Sigma'^n$, which is obtained from that given by the respective movement g . It exists a linear transformation of V , which brings the basis $\{E_i\}_{n+1}$ in $\{E'_i\}_{n+1}$, where the last is formed with the representatives e'_i of the self-polar simplex ${}_a\Sigma'^n$. Because this basis are normalized through the condition (2.b), $\langle E_i, E_i \rangle_j = \rho^2$, $\langle E'_i, E'_i \rangle_j = \rho^2$, it results that the respective transformation is a orthogonal transformation (when $l=n$, $q < 0$) or pseudo-orthogonal (in the other cases). In R_l^{n+1} these induce rotations and antirotations, identic transformations and central symmetries of the hyperspheres $Q = \{x \in R_l^{n+1}: b_l^{n+1}(x, x) = -\rho^2\}$, which constitutes model $\mathfrak{V}_l^n(q)$.

If through such a movement the proper and the ideal domain are changing between them, the norms of the vectors E_i will amplify themselves through v .

Vice versa, rotation or (for $n=2l-1$) an antirotation followed by a central symmetry of Q , determines in V the transformations $E_i \rightarrow E'_i \rightarrow -E'_i$ so that if E_i are representatives of the tops of an self-polar simplex ${}_a\Sigma^n$ from $\mathfrak{V}_l^n(q)$, E'_i would also be the representatives of the tops of another self-polar simplex ${}_a\Sigma'^n$ and $-E'_i$ for the same.

It results that the passing in $\mathfrak{V}_l^n(q)$ from the simplex ${}_a\Sigma^n$ to ${}_a\Sigma'^n$ would constitute a movement of a this space.

So, the following theorem was rediscovered. Its results are known as concerns the relation which exists between the movements of the non-euclidean spaces and therotations of the hyperspheres of the pseudo-euclidean spaces which serve as models for these ([9], p. 78, 166, 222).

3.1. Theorem. Each movement $g \in G_N$ of the non-euclidean space $\mathfrak{V}_l^n(q)$ is determined by a rotation of an self-polar simplex ${}_a\Sigma^n$, and mutually, for $n \neq 2l-1$, each non-euclidean movement induces in K — the associated space $V_l^{n+1}(q)$ two rotations, which differ by a central symmetry. In the case of the space $\mathfrak{V}_l^{2l-1}(q)$, each movement of this induces an antirotation too in K — associated space $V_l^{2l}(q)$.

3.2. Remark. To approach the study of the movements of the non-euclidean spaces with the help of the self-polar simplexes, so as it was underlined in this section, some of the results known before, can be interpreted in a more general view by continuing their study from a topologic point of view.

BIBLIOGRAPHY

- [1] N. Boja: Non-Euclidean spaces from the algebraic point of view; *Rendiconti di Matematica*, Roma, (1972), (4), vol. 5, Serie VI, pp. 773—784.
- [2] N. Boja: An method of introducing non-euclidean Q_p — spaces; *Bul. şt. şi teh. inst. Politehnic Timişoara*, (1977), Tom 22 (36), Fasc. 1, pp. 31—34.
- [3] N. Boja: About the C_v algebra associated to a finite extension of the second degree of a K — field; *Bul. şt. şi teh. Inst. Politehnic Timişoara*, (1975), Tom 20 (34), Fasc. 2, pp. 129—131.
- [4] N. Boja: On the topology of hyperplanes of a non-euclidean space; *Mathematika Balkanika*, Beograd, (1978), (to appear).
- [5] N. Boja: The transvections and the non-euclidean movements group; *Analele Univ. Timişoara*, Serie Şt. Mat., vol X, 1, (1972), 35—39.
- [6] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*; New York, London, 1963.
- [7] C. Telesman: *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*; Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1964.
- [8] B.A. Rozenfeld: *Mnogomerniye prostranstva*; Izd. „Nauka“, Moskva, 1966.
- [9] B.A. Rozenfeld: *Neevklodovi prostranstva*; Izd. „Nauka“, Moskva, 1969.
- [10] I.A. Wolf: *Spaces of constant curvature*; Mc. Graw-Hill Comp., New York, 1967.

ASUPRA C-TOPOLOGIEI SPAȚIULUI PĂRȚILOR *

DE

T. BANZARU

1. În [1] sînt prezentate unele topologii pe spațiul părților, cu ajutorul cărora studiul continuității aplicațiilor multivoce este redus la acela al funcțiilor univoce.

Lucrarea de față va prezenta un studiu a unei topologii pe spațiul părților unui spațiu topologic dat, care să permită cercetarea C-continuității aplicațiilor multivoce [3]. Pentru aceasta vom folosi în cele ce urmează următoarele notații și convenții :

Prin X vom nota spațiul de bază, iar cu τ o topologie pe acest spațiu.

$$\mathfrak{D}_0(X) = \{E \subset X : E \neq \emptyset\}$$

$$\mathfrak{K}(X) = \{E \subset X : E \text{-compactă}\}.$$

Dacă $\{G_i\}_{i \in I}$ este o familie de submulțimi a spațiului topologic (X, τ) , atunci

$$\langle G_i \rangle_{i \in I} = \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset \bigcup_{i \in I} G_i, \quad E \cap G_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in I\}.$$

Propoziția I.1. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, atunci familiile mulțimilor de forma $\langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$, $G_i \in \tau$, $X - G_i \in \mathfrak{K}(X)$, $i \in \overline{1, n}$, formează o bază pentru o topologie pe $\mathfrak{D}_0(X)$.

Demonstrație. a) Fie $\mathcal{G} = \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$, $\mathfrak{D} = \langle D_1, D_2, \dots, D_m \rangle$, $G_i \in \tau$, $X - G_i, X - D_j \in \mathfrak{K}(X)$, $\forall i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, m}$.

Notînd

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i, \quad D = \bigcup_{j=1}^m D_j,$$

avem :

$$\mathcal{G} \cap \mathfrak{D} = \langle G_1 \cap D, G_2 \cap D, \dots, G_n \cap D, D_1 \cap G, D_2 \cap G, \dots, D_m \cap G \rangle$$

unde

$$X - (G_i \cap D) = (X - G_i) \cup (X - D) = (X - G_i) \cup \left(\bigcap_{j=1}^m (X - D_j) \right).$$

Deoarece

$$X - G_i \in \mathfrak{K}(X), \quad \bigcap_{j=1}^m (X - D_j) \in \mathfrak{K}(X) \text{ rezultă } X - (G_i \cap D) \in \mathfrak{K}(X), \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Analog, $X - (D_j \cap G) \in \mathfrak{K}(X)$, $\forall j \in \overline{1, m}$.

b) $\langle X \rangle = \mathfrak{D}_0(X)$.

* Comunicată la simpozionul „Matematica modernă aplicată la rezolvarea problemelor din industrie și economie“ I.P.T. 3 iunie 1978.

Din a) și b) rezultă afirmația propoziției I.1.

Notăm această-bază cu $\mathfrak{B}^c$.

Definiția I.1. Vom numi C -topologia spațiului părților, topologia generată de baza $\mathfrak{B}^c$ și o vom nota în cele ce urmează cu $\mathfrak{T}^c$.

II. PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE ALE TOPOLOGIEI $\mathfrak{T}^c$

Lema II.1. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, atunci mulțimea $\mathcal{A} = \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset A\}$ este închisă în $(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{T}^c)$ dacă $A \subset X$ este închisă și compactă în (X, τ) .

Demonstrație. $\mathfrak{D}_0(X) - \mathcal{A} = \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \cap (X - A) \neq \emptyset\} = \langle X - A, X \rangle \in \mathfrak{T}^c$, deoarece $X - A \in \tau$, $X \in \tau$, iar $X - (X - A) = A \in \mathfrak{K}(X)$ și $X - X = \emptyset \in \mathfrak{K}(X)$.

Lema II.2. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, atunci mulțimea $\mathcal{A} = \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \cap A \neq \emptyset\}$ este închisă în $(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{T}^c)$ dacă $A \subset X$ este închisă și compactă în (X, τ) .

Demonstrație. $\mathfrak{D}_0(X) - \mathcal{A} = \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset X - A\} = \langle X - A \rangle \in \mathfrak{T}^c$, deoarece $X - (X - A) \in \mathfrak{K}(X)$ și $X - A \in \tau$.

Definiția II.1. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, vom spune că o topologie pe $\mathfrak{D}_0(X)$ este C -acceptabilă, dacă în această topologie mulțimea $\{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset A\}$ este închisă pentru toate submulțimile A ale lui X închise și compacte și este deschisă pentru toate submulțimile A ale lui X deschise și cu complementară compactă.

Teorema II.1. Topologia $\mathfrak{T}^c$ este cea mai puțin fină topologie C -acceptabilă pe $\mathfrak{D}_0(X)$.

Demonstrație. Conform lemelor II.1 și II.2, $\mathfrak{T}^c$ este o topologie C -acceptabilă. Fie acum $\mathfrak{H}$ o topologie C -acceptabilă pe $\mathfrak{D}_0(X)$ și $\mathcal{G}$ un element al bazei $\mathfrak{B}^c$ pentru $\mathfrak{T}^c$. Deci

$$\mathcal{G} = \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle, G_i \in \tau, X - G_i \in \mathfrak{K}(X), i \in \overline{1, n}.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left\{ E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i \right\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \cap G_i \neq \emptyset\} \right) = \\ &= \left\{ E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i \right\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathfrak{D}_0(X) - \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset X - G_i\}) \right). \end{aligned}$$

Dar

$$\left\{ E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i \right\} \in \mathfrak{H},$$

deoarece

$$X - \bigcup_{i=1}^n G_i = \bigcap_{i=1}^n (X - G_i) \in \mathfrak{K}(X).$$

De asemenea

$$\mathfrak{D}_0(X) - \{E \in \mathfrak{D}_0(X) : E \subset X - G_i\} \in \mathfrak{H}, \forall i \in \overline{1, n}.$$

Rezultă așadar că $\mathcal{G} \in \mathfrak{H}$. Cum $\mathcal{G}$ a fost un element arbitrar al bazei $\mathfrak{B}^c$, avem $\mathfrak{T}^c \subset \mathfrak{H}$, c.e.t.d.

Lema II.3. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{S}^c)$ este spațiul părților cu C-topologia generată de τ , atunci oricare ar fi $A \in \mathfrak{D}_0(X)$, avem :

$$\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$$

Demonstrație. $A \subset \bar{A}^\tau \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle \bar{A}^\tau \rangle \Rightarrow \overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} \subset \overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$. Reciproc, dacă $E \notin \langle A \rangle \Rightarrow \exists G_i \in \tau, i \in \overline{1, n}, X - G_i \in \mathfrak{K}(X), i \in \overline{1, n} : E \subset G_1, G_2, \dots, G_n >, \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle \cap \langle A \rangle = \emptyset \Rightarrow \langle G_1 \cap A, G_2 \cap A, \dots, G_n \cap A, A \cap \bigcup_{i=1}^n G_i \rangle = \emptyset \Rightarrow \exists i_0 \in \overline{1, n} : G_{i_0} \cap A = \emptyset \Rightarrow G_{i_0} \subset X - A \Rightarrow \overline{G_{i_0}}^{\mathfrak{S}^c} \Rightarrow G_{i_0} \cap \bar{A}^\tau = \emptyset \Rightarrow \langle \overline{G_{i_0}}^{\mathfrak{S}^c}, G_2, \dots, G_n \rangle \cap \langle \bar{A}^\tau \rangle = \emptyset$, adică $E \notin \langle \bar{A}^\tau \rangle$. Prin urmare $\overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c} \subset \overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$, ceea ce ne conduce la egalitatea din enunț.

Consecință. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $\bar{A}^\tau$ este compactă în acest spațiu, atunci

$$\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$$

Demonstrație. $\bar{A}^\tau \in \mathfrak{K}(X) \Rightarrow \overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \langle \bar{A}^\tau \rangle$ și conform lemei II.3, rezultă $\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^\tau \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$.

Lema II.4. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{S}^c)$ spațiul părților cu C-topologia generată de τ , atunci are loc egalitatea :

$$\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^* \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$$

unde $\bar{A}^*$ este intersecția mulțimilor compacte și închise care conțin pe A dacă există astfel de mulțimi și este întreg spațiul X în caz contrar.

Demonstrație. Dacă $\bar{A}^* \neq X$, atunci mulțimea $\bar{A}^*$ este închisă și compactă în (X, τ) , deoarece intersecția arbitrară de mulțimi închise este închisă și intersecția arbitrară de mulțimi închise și compacte este compactă. Bazați pe aceasta, avem : $\overline{\langle \bar{A}^* \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \bar{A}^*$ și conform consecinței precedente $\overline{\langle \bar{A}^* \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^* \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$. Însă, urmînd aceeași demonstrație ca și în lema II.3., avem :

$$\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{S}^c} = \overline{\langle \bar{A}^* \rangle}^{\mathfrak{S}^c}$$

Dacă $\bar{A}^* = X$, fie $E \in \mathfrak{D}_0(X)$ și $E \notin \langle A \rangle$. Atunci $\exists G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau : X - G_i \in \mathfrak{K}(X), i \in \overline{1, n}, E \subset G_1, G_2, \dots, G_n >, \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle \cap \langle A \rangle = \emptyset$. Deci $\langle G_1 \cap A, G_2 \cap A, \dots, G_n \cap A, A \cap \bigcup_{i=1}^n G_i \rangle = \emptyset \Rightarrow \exists i_0 \in \overline{1, n} : G_{i_0} \cap A = \emptyset$,

$E \cap G_{i_0} \neq \emptyset$. Acesta implică $G_{i_0} \subset X - A$, adică $A \subset X - G_{i_0}$ și deci $\bar{A}^* = X \subset X - G_{i_0}$.

De aici deducem $G_{i_0} = \emptyset$. Prin urmare $E \cap G_{i_0} = \emptyset$, ceea ce contrazice relația $E \cap G_{i_0} \neq \emptyset$.

Rezultă așadar $\mathfrak{D}_0(X) = \langle A \rangle$, ceea ce demonstrează complet lema.

Consecință. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic compact, iar $(\mathfrak{Q}_0(X), \mathfrak{T}^C)$ spațiul părților cu C -topologia generată de τ , atunci

$$\overline{\langle A \rangle}^{\mathfrak{T}^C} = \langle \bar{A}^\tau \rangle$$

Teorema II.2. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $A_1, A_2, \dots, A_n$ sînt submulțimi închise și compacte în X , atunci $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ este închisă în spațiul părților cu C -topologia generală de τ .

Demonstrație. $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n A_i \rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \{E \in \mathfrak{Q}_0(X) : E \cap A_i \neq \emptyset\} \right)$ și conform lemelor II.1 și II.2 rezultă afirmația teoremei.

Teorema II.3. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic iar $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}_0(X)$, atunci

$$\overline{\langle A_2, A_2, \dots, A_n \rangle}^{\mathfrak{T}^C} = \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle^{\mathfrak{T}^C}$$

Demonstrație. Evident $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle \subset \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle$. Reciproc, dacă $E \notin \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle \Rightarrow \exists G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau, X - G_i \in \mathfrak{K}(X), \forall i \in \overline{1, n}, E \in \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle : \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle \cap \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle = \emptyset \Leftrightarrow \langle A_1 \cap G, A_2 \cap G, \dots, A_n \cap G, G_1 \cap A, G_2 \cap A, \dots, G_n \cap A \rangle = \emptyset$ unde $G = \bigcup_{i=1}^m G_i, A = \bigcup_{j=1}^n A_j$.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \overline{1, m}, \exists j_0 \in \overline{1, n} : A_{j_0} \cap G = \emptyset, G_{i_0} \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^m (A_{j_0} \cap G_i) = \emptyset, \bigcup_{j=1}^n (G_{i_0} \cap A_j) = \emptyset \Rightarrow A_{j_0} \cap G_i = \emptyset$ pentru $\forall i \in \overline{1, m}, G_{i_0} \cap A_j = \emptyset$ pentru $\forall j \in \overline{1, n}$. De aici $G_i \subset X - A_{j_0}, \forall i \in \overline{1, m}$ și $G_{i_0} \subset X - A_j, \forall j \in \overline{1, n}$. Așadar $G_i \subset X - \bar{A}_{j_0}^\tau, \forall i \in \overline{1, m}$ și $G_{i_0} \subset X - \bar{A}_j^\tau, \forall j \in \overline{1, n}$. Deducem așa dar că $G \subset X - \bar{A}_{j_0}^\tau$ și $G_{i_0} \subset \bigcap_{j=1}^n (X - \bar{A}_j^\tau) = X - \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_j^\tau \Rightarrow \langle G_1, G_2, \dots, G_m \rangle \cap \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle = \emptyset \Rightarrow E \notin \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle$, ceea ce implică $\langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle \subset \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Consecința 1. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}_0(X)$, $\bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \in \mathfrak{K}(X)$, atunci $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle$.

Consecința 2. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic compact, iar $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}_0(X)$, atunci $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle \bar{A}_1^\tau, \bar{A}_2^\tau, \dots, \bar{A}_n^\tau \rangle$.

Consecința 3. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic compact, iar $A \subset X$ este densă în X , atunci $\mathfrak{Q}_0(A)$ este densă în spațiul topologic $\mathfrak{Q}_0(X)$ cu C -topologia generată de τ .

Într-adevăr, $\mathfrak{Q}_0(A) = \langle A \rangle = \langle \bar{A}^\tau \rangle = \langle X \rangle = \mathfrak{Q}_0(X)$.

Teorema II.4. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic, iar $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{Q}_0(X)$, atunci

$$\overline{\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle}^{\mathfrak{T}^C} = \langle \bar{A}_1^{\tau*}, \bar{A}_2^{\tau*}, \dots, \bar{A}_n^{\tau*} \rangle.$$

Demonstrația este analoagă cu cea din teorema precedentă.

Teorema II.5. Dacă (X, τ) este un spațiu topologic regulat, local compact, iar $\mathfrak{B} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{T}^c)$, atunci $\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} \bar{E}$.

Demonstrație. Fie $A = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} \bar{E}$ și $x \in \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} \bar{E}$. Atunci, pentru orice vecinătate închisă și compactă V a lui x , $\mathfrak{B} \cap \{E \in \mathfrak{D}_0(X) | E \cap V \neq \emptyset\}$ este o submulțime închisă a lui $\mathfrak{B}$ (vezi lema II.2.), și familia tuturor acestor submulțimi are proprietatea intersecției finite. Deoarece $\mathfrak{B}$ este compactă, această familie are o intersecție nevidă $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{B}$. Cum X este regulat, $x \in \bar{E}$ pentru orice $E \in \mathfrak{D}$, căci în caz contrar există V închisă și compactă astfel ca $V \cap E = \emptyset$, ceea ce contrazice faptul că $E \in \mathfrak{D}$. Așadar $x \in \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} \bar{E}$ și deci $\bigcup E \subset \bigcup \bar{E}$, ceea ce demonstrează egalitatea.

Teorema II.6. Dacă $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o bază de vecinătăți deschise ale lui x din spațiul topologic (X, τ) , $X - U_\alpha \in \mathfrak{K}(X)$, $\alpha \in A$, atunci $\{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ este o bază pentru vecinătățile lui $\{x\}$ din $(\mathfrak{D}_0(X), \mathfrak{T}^c)$.

Demonstrație. Evident $\{x\} \in \langle U_\alpha \rangle$, $\forall \alpha \in A \Rightarrow \mathfrak{W}_{\{x\}} = \{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{V}_{\{x\}}$.

Fie acum $V_{\{x\}} \in \mathfrak{V}_{\{x\}}$. Rezultă atunci că există $G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau : X - G_i \in \mathfrak{K}(X)$, $i \in \overline{1, n}$, $\{x\} \in \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle \subset V_{\{x\}}$. De aici deducem $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$.

Prin urmare, $\exists U_{\alpha_0} : x \in U_{\alpha_0} \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$ și deci $\{x\} \in \langle U_{\alpha_0} \rangle \subset \langle \bigcap_{i=1}^n G_i \rangle \subset \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle \subset V_{\{x\}}$. Deci $\{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ este o bază de vecinătăți pentru $\{x\}$ în $\mathfrak{D}_0(X)$ cu topologia $\mathfrak{T}^c$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71, 1951.
- [2] T. Bănzaru, N. Crivăț, Structures uniformes sur l'espace des parties d'un espace uniforme et quasicontinuité des applications multivoques, Bul. Șt. și teh. I.P.T., Seria Mat-Fiz-Mec. Tom 20 (34), fasc. 2/1975.
- [3] K. R. Gentry, H. B. Hoyle, C-continuous functions, Yokohama Math. J. 18, 2/1970.
- [4] C. I. Berge, Espaces topologiques. Fonctions multivoques, Dunod, Paris 1959.
- [5] W. I. Thron, Topological Structures, Holt Rinehart. 1966.

ÜBER DIE C-TOPOLOGIE DES RAUMES DER UNTERMENGEN.

ZUSAMMENFASSUNG

In vorliegender Arbeit wird auf dem Raum der Untermengen ein gegebener topologischer Raum mit Hilfe der offenen Mengen mit kompakter Komplementärmenge eine Topologie aufgebaut. In dieser Topologie, genannt des Raumes der Untermengen, werden in Zusammenhang mit den geschlossenen Mengen und den Abschlussmengen einige Eigenschaften studiert die in der Erforschung der C-Stetigkeit der mehrdeutigen Abbildungen Anwendung finden.

ASUPRA INDEPENDENȚEI CLASELOR ECUATIONALE ALE ALGEBRELOR UNIVERSALE

DE
CARMENCITA UROȘU

Fie $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$ clase ecuaționale de acelaș tip τ . Vom nota cu $K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{n-1}$ cea mai mică clasă ecuațională care conține orice clasă K_i . Produsul direct al claselor ecuaționale, notat cu $K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$, este clasa tuturor algebrilor care sînt izomorfe cu o algebră de forma :

$$U \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}, \text{ unde } U_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}.$$

Teorema lui A. I. Malcev caracterizează acele clase ecuaționale ale căror algebre au relațiile de congruență permutabile :

Teorema I (A.I. Malcev)

Pentru o clasă ecuațională K , de tipul τ , următoarele afirmații sînt echivalente :

- 1) Pentru fiecare $U \in K$, congruențele algebrei U sînt permutabile.
- 2) Există un simbol polinomial ternar de tipul τ , $p \in \mathfrak{B}_{(\tau)}^{(3)}$ astfel că următoarele două identități au loc în clasa K :

$$x = p(x_0, x_1, x_1) \text{ și } x = p(x_0, x_0, x_1)$$

În lucrarea [3] sînt prezentate clasele ecuaționale ale căror algebre au laticia congruențelor distributivă :

Teorema 2.

Fie K o clasă ecuațională de tipul τ . Dacă există un simbol polinomial ternar p astfel ca fiecare din următoarele identități să existe în clasa K :

- 1) $x = p(x, x, z)$, $p(x, y, x) = x$, $p(x, z, z) = z$ atunci :
- 2) are loc legea de distributivitate infinită în laticia congruențelor oricărei algebre din K :

$$\theta \cap \left(\bigcup_{i \in I} \theta_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\theta \cap \theta_i); \quad \forall \theta, \theta_i \in \mathcal{C}(U)$$

Fie $U = \langle A, F \rangle \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$ și considerăm simbolurile polinomiale m -are de tipul τ :

$$p, q \in \mathfrak{B}_{(\tau)}^{(m)}.$$

Există algebrele $U_i = \langle A_i, F \rangle$ și $U_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}$ astfel că :

$$U \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}.$$

Considerăm $a^i, b^i \in A, 0 \leq i < m$:

$$a^i = \langle a_0^i, \dots, a_{n-1}^i \rangle ; \quad b^i = \langle b_0^i, \dots, b_{n-1}^i \rangle.$$

Vom nota cu p, q (respectiv p^i, q^i) polinoamele induse de p și q în algebra U (respectiv în U_i). Deoarece operațiile se definesc pe componente, are loc următorul rezultat :

Lema I.

$p(a^0, a^1, \dots, a^{m-1}) = q(b^0, b^1, \dots, b^{m-1})$ d. și $n \cdot d \cdot p^i(a_0^i, a_1^i, \dots, a_{n-1}^i) = q^i(b_0^i, b_1^i, \dots, b_{n-1}^i)$ pentru $\forall i \in \overline{0, n-1}$.

Funcția :

$$\varphi : \mathfrak{A}_U \rightarrow \langle \mathfrak{A}_{V_0}^{(m)}, \dots, \mathfrak{A}_{V_{n-1}}^{(m)} \rangle$$

este un omomorfism injectiv al algebrei $\langle \mathfrak{A}_{V_\tau}^{(m)}(U), F \rangle$ în algebra produs direct :

$$\langle \mathfrak{A}_{V_0}^{(m)}(U_0), F \rangle \times \dots \times \langle \mathfrak{A}_{V_{n-1}}^{(m)}(U_{n-1}), F \rangle.$$

Corolar.

Fiecărui polinom m -ar de tipul τ pe algebra $U \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$ îi corespunde în mod unic câte un polinom pe fiecare $U_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}$ unde $U \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$.

Definiție.

Clasele ecuaționale similare : $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$ se numesc independente dacă există un simbol polinomial n -ar p , astfel că identitatea :

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_i$$

are loc în fiecare clasă ecuațională $K_i, i = \overline{0, n-1}$.

În lucrarea [2] este studiată independența a două clase ecuaționale similare. În acest caz se stabilește că dacă K_0 și K_1 sînt clase ecuaționale independente, are loc relația $K_0 \vee K_1 = K_0 \times K_1$ și fiecare algebră $U \in K_0 \vee K_1$ are, abstracție făcînd de un izomorfism, o reprezentare unică :

$$U \cong U_0 \times U_1, \quad U_i \in K_i, i = \overline{0, 1}$$

Are loc de asemenea și teorema mai generală :

Teorema 3.

Fie $K_i, i = \overline{0, n-1}$, clase ecuaționale independente. Atunci are loc relația :

$$K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{n-1} = K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$$

și fiecare algebră $U \in K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{n-1}$ are, abstracție făcînd de un izomorfism, o prezentare unică :

$$U \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}, \quad U_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}.$$

Demonstrație.

Teorema se demonstrează prin inducție, plecând de la cazul a două clase ecuaționale. Presupunem $n=k$ și fie $K_0, K_1, \dots, K_k$ clase ecuaționale independente. Vom arăta că clasele ecuaționale : $K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1}$ și K_k sînt independente. Conform ipotezei, există simbolul polinomial $k+1$ -ar p astfel că au loc identitățile :

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = x_i \text{ în } K_i, i = \overline{0, k}.$$

Considerăm simbolul polinomial binar : $q(x_0, x_k) = p(x_0, x_0, \dots, x_0, x_k)$ și $q(x_0, x_k) = x_0$ în $K_j, j = \overline{0, k-1}$ iar $q(x_0, x_k) = x_k$ în K_k . Deoarece identitatea : $q(x_0, x_k) = x_0$ are loc de asemenea și în clasa $K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1}$, rezultă că aceasta și clasa K_k sînt independente. Avem deci :

$$(K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1}) \vee K_k = (K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1}) \times K_k$$

și orice algebră $U \in K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k$ are, abstracție făcînd de un izomorfism, o reprezentare unică :

$$U \cong B \times U_k \text{ unde } B \in K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1}, U_k \in K_k.$$

Folosind ipoteza de inducție, rezultă :

$$K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1} = K_0 \times \dots \times K_1 \times \dots \times K_{k-1}$$

și algebra B are abstracție făcînd de un izomorfism, o reprezentare unică în produs direct :

$$B \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{k-1}, U_i \in K_i, i = \overline{0, k-1}.$$

Deci are loc relația :

$$K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_{k-1} \vee K_k = K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{k-1} \times K_k$$

și

$$U \cong B \times U_k \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{k-1} \times U_k,$$

reprezentarea fiind unică abstracție făcînd de un izomorfism.

Corolar. I

Dacă $K_i, i = \overline{0, n-1}$ sînt clase ecuaționale independente, atunci condițiile de permutabilitate, modularitate, distributivitate, asupra laticei congruențelor unei algebre $U \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$ pot fi înlocuite cu aceleași condiții pentru laticea fiecărei algebre $U_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}$ unde $U \cong U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$. Acest rezultat are loc conform teoremei precedente, teoremelor I și 2 și a lemei I.

Corolarul 2.

Dacă $K_i, i = \overline{0, n-1}$ sînt clase ecuaționale independente și algebra $U \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$, atunci pentru orice n congruențe $\theta_i, i = \overline{0, n-1}$ și $\theta_i \in \mathfrak{C}(U_i)$ definim relația de congruență θ pe algebra U astfel : pentru $a, b \in U, a \equiv b (\theta) \Leftrightarrow a(i) \equiv b(i) (\theta_i), \forall i = \overline{0, n-1}$. Are loc izomorfismul :

$$U/\theta \cong \pi(U_i/\theta_i : i = \overline{0, n-1})$$

prin corespondența :

$$[a] \theta \rightarrow \bar{a} \text{ unde } \bar{a}(i) = [a(i)] \theta_i.$$

Teorema 4.

Fie $K_i, i = \overline{0, n-1}$, clase ecuaționale similare independente. Atunci au loc următoarele condiții :

- 1) $K_0 \wedge K_1 \wedge \dots \wedge K_{n-1}$ constă din algebre cu un singur element.
- 2) Pentru fiecare algebră $U \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$ relațiile de congruență θ_i pe U astfel ca $U/\theta_i \in K_i, i = \overline{0, n-1}$, formează o mulțime absolut permutabilă.

Demonstrație.

Considerăm clasele ecuaționale $K_i, i = \overline{0, n-1}$, independente și fie $a_i, i = \overline{0, n-1}$, elemente ale algebrei $U = K_0 \wedge K_1 \wedge \dots \wedge K_{n-1}$. Atunci avem : $p(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_i$ pentru $i = \overline{0, n-1}$ și deci condiția I) are loc.

Dacă $U \in K_0 \times K_1 \times \dots \times K_{n-1}$ și $a_i \in U_i$, pentru $i = \overline{0, n-1}$, atunci are loc relația : $[a_i] \theta_i = p([a_0] \theta_i, \dots, [a_{n-1}] \theta_i) = [p(a_0, \dots, a_{n-1})] \theta_i$ și deci : $a_i \equiv p(a_0, \dots, a_{n-1}) (\theta_i)$ pentru $i = \overline{0, n-1}$. De aici rezultă că familia finită de congruențe este absolut permutabilă.

Corolar

Conform [I] rezultă că sublaticea lăței congruențelor $\mathcal{C}(U)$ generată de mulțimea $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ este distributivă și izomorfă cu o lățe Boole cu $2n$ elemente.

Exemplu.

Fie K_{p_i} (p_i sînt numere prime distincte pentru $i = \overline{0, n-1}$) notată clasa ecuațională a tuturor inelelor de caracteristică p_i . Vom nota cu $m = p_0, p_1 \dots p_{n-1}$ și $q_i = m/p_i$. Fie $l_i, i = \overline{0, n-1}$ întregii care satisfac condiția : $q_i l_i \equiv 1 (p_i)$ și considerăm simbolul polinomial :

$$p = q_0 l_0 x_0 + q_1 l_1 x_1 + \dots + q_{n-1} l_{n-1} x_{n-1}.$$

Deoarece $q_j = 0 (p_i)$ pentru $i \neq j, i = \overline{0, n-1}$, rezultă că clasele $K_i, i = \overline{0, n-1}$ sînt independente și are loc relația :

$$K_{p_0} \vee K_{p_1} \vee \dots \vee K_{p_{n-1}} = K_{p_0} \times K_{p_1} \times \dots \times K_{p_{n-1}}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] G. Grätzer: Universal algebra, I ed. Princeton, 1968.
- [2] G. Grätzer, J. Plonka, H. Lakser: Joins and direct products of equational classes, Canad. Math. Bull. 12, 1969, 741-744.
- [3] A. F. Pixley: Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 14, 1963, 105-109.

ÜBER DIE UNABHÄNGIGKEIT DER GLEICHUNGSKLASSEN DER ALLGEMEINEN ALGEBRA

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird die Gleichungsklasse als direktes Produkt einer endlichen Zahl von Gleichungsklassen des gleichen Typs studiert, in Fall, das sie unabhängig voneinander sind.

TOPOLOGII PENTRU GRUPURI ABELIENE COMPLETE *

DE

de B. RENDI și A. TRANDAFIR

Grupul abelian $(G, +)$ se zice complet, (1), dacă pentru orice $x \in G$ și orice $n \in \mathbb{N}$ există $y \in G$ astfel ca $y_1 + y_2 + \dots + y_n = x$, unde $y_i = y, i = \overline{1, n}$. Vom nota $y = \frac{1}{n} x$. Se observă că pentru orice $r \in Q$ și orice $x \in G$ are sens rx și $rx \in G$. Fie $a \in G$ și $L_a = \{ra/r \in Q\}$. Se observă că $L_a \subset G$ este subgrup izomorf cu $(Q, +)$. Elementul a se zice generatorul acestui subgrup. Structura metrică / topologică / din Q se transportă pe L_a prin acest izomorfism. Submulțimea $V_0(\varepsilon, L_a) = \{x \in L_a / x = ra, |r| < \varepsilon\}$ se zice vecinătate sferică de rază ε în L_a pentru elementul nul $o \in G$. Remarcă : dacă $b \in L_a$, atunci $L_b = L_a - V_0(\varepsilon, L_a) \neq V_0(\varepsilon, L_b)$ pentru $b \in L_a$ dar există $\varepsilon' > 0$, astfel ca $V_0(\varepsilon, L_b) = V_0(\varepsilon', L_a)$. De aici se deduce că mulțimea vecinătăților sferice în L_a nu depinde de alegerea generatorului din L_a , [2]. S-a obținut familia de submulțimi $\{L_a\}_{a \in G}$ a grupului G . Pe L_a s-a definit o topologie/cea generată de vecinătățile sferice introduse mai sus/. Putem defini, [3], o bază de vecinătăți a lui $o \in G$ astfel : $V \subset G$ se zice vecinătate pentru $o \in G$ dacă $V \cap L_a$ este o vecinătate sferică în L_a , pentru $o \in G$. Se verifică cu ușurință că se obține o topologie $\mathfrak{T}_C$ pe grupul abelian complet $(G, +)$.

Remarcă 1. Construcția de mai sus se poate efectua pentru o structură $(G, +)$ grupoid complet cu unitate. În locul mulțimilor L_a se consideră mulțimile $L_a = \{ra / r \in Q, r \geq 0\}$. În particular dacă grupoidul este un grup abelian complet se obține și pe această cale tot topologia $\mathfrak{T}_C$.

Remarcă 2. O construcție analogă ne definește o topologie de tipul în cazul unui grup G /grupoid cu unitate/ pentru care condiția de completitudine se înlocuiește cu următoarea condiție : există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru orice $x \in G$, există $y \in G$ cu proprietatea $y_1^+ \dots + y_{n_0} = x$ unde $y_i = y, i = \overline{1, n_0}$. În locul mulțimilor L_a se consideră mulțimile $L_a, n_0 = \left\{ \frac{p}{n_0^k} a / p, k \in \mathbb{Z} \text{ (sau } p, k \in \mathbb{N}) \right\}$. Fie $\mathfrak{T}_{n_0}$ topologia pe G definită cu ajutorul $\{L_a, n_0\}_{a \in G}$. În cazul unui grup abelian complet, topologia $\mathfrak{T}_C$ nu coincide cu $\mathfrak{T}_{n_0}, \forall n_0 \in \mathbb{N}$. Din exemplele care vor urma se va deduce această afirmație.

Remarcă 3. Cazurile prezentate anterior se pot privi drept cazuri particulare ale următoarului caz : fie G un grupoid cu element neutru verificînd următoarea pro-

Notă : Lucrarea a fost prezentată la simpozionul „Matematica modernă aplicată la rezolvarea problemelor din industrie și economie“, Timișoara, 3 iunie 1978.

prietate : pentru orice $x \in G$, există cel puțin un $n(x) \in N$ și există $y_{n(x)} \in G$ astfel încît $n(x) \cdot y_{n(x)} = x$. Notăm $N(x)$ mulțimea acestor numere naturale $n(x)$. Se verifică imediat că $\text{card } N(x) = \aleph_0$. Punem $L_x = \left\{ \frac{p}{n} x / p \in N, n \in N(x) \right\} \subset G$.

Aplicația $\varphi : L_x \rightarrow Q$, $\varphi \left(\frac{p}{n} x \right) = \frac{p}{n}$ este un monomorfism de la grupoidul L_x la grupoidul $(Q, +)$. Topologia naturală a lui Q induce pe $\varphi(L_x)$ o topologie care prin φ^{-1} definește o topologie pe L_x . De fapt această topologie este generată de familia de vecinătăți $\{V_0(\varepsilon, L_x)\}_{\varepsilon > 0}$. $V_0(\varepsilon, L_x) = \left\{ \frac{p}{n} x / p \in N, n \in N(x), \frac{p}{n} < \varepsilon \right\}$.

Exemplul 1. $G=Q$; Topologia $\mathfrak{F}_C$ coincide cu topologia naturală pe Q .

Exemplul 2. $G=R$; Topologia $\mathfrak{F}_C$ nu coincide cu topologia naturală a lui R . Pentru a arăta aceasta este suficient să evidențiem un șir care converge la 0 în topologia naturală dar nu este convergent în topologia $\mathfrak{F}_C$. Fie $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ un șir crescător arbitrar de numere prime. Definim șirul de numere reale $s_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}}$, $n \in N$. Evident $\lim_n s_n = 0$. Pentru a demonstra că șirul nu este convergent în vom construi o vecinătate a originii în topologia $\mathfrak{F}_C$ care nu conține nici un termen al șirului definit. Punem $V_i = \left(-\frac{1}{2} s_i, \frac{1}{2} s_i \right)$, $H = (0, 1) \cap \left(R - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_{s_i} \right)$. Vecinătatea căutată este $V = HU \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \right)$.

Remarcă. Analog cu această construcție se poate deduce și afirmația de la remarca 2.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Kuros, A. G. Teoria grupurilor, București 1959.
- [2] Kuratowski, I. Introducere în teoria mulțimilor și în topologie București 1969.
- [3] Rendi, B. Structura algebrică a spațiilor metrice, Studia Univ. Babeș Bolyai Cluj, Seria Mat., 1969.

TOPOLOGY FOR COMPLETE ABELIAN GROUPS

REZUMAT

În lucrarea de față se introduce o structură topologică nouă pe grupuri abeliene complete, structură intim legată de proprietatea de completitudine. Se dau exemple.

Dans le présent ouvrage les auteurs introduisent une structure topologique nouvelle sur des groupes abéliens complets. Il s'agit d'une structure liée à la propriété de complétude. On y donne des exemples.

The present paper introduces a new topological structure on complete Abel groups, structure closely related to the property of completeness. Examples are also included.

CITEVA PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SOLUȚIILOR ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A COSINUSULUI

DE

A. FILIPESCU și GH. BABESCU

1. INTRODUCERE.

Este bine cunoscut faptul ([1], p. 120) că orice funcție reală continuă $f(t)$, $t \in R$, care satisface ecuația funcțională

$$f(t+s) + f(t-s) = 2f(t)f(s), \quad \forall t, s \in R, \quad (1)$$

are una din următoarele forme :

a) $f(t) \equiv 0$

b) $f(t) = \cos at$, $a \in R$

c) $f(t) = (A^t + A^{-t})/2$, $A \in R^+$.

În cazul când $f: E \rightarrow F$, $(E, +)$ avînd structură algebrică de grup și $(F, +, \cdot)$ cel puțin structură algebrică de inel, ecuația (1) a fost studiată de mai mulți autori ([3], [5], [6], [7], etc.), iar cînd $E \equiv R$ și F este o algebră Banach, aceeași ecuație a fost studiată de alți autori ([2], [9], etc.).

În această notă noi vom studia unele proprietăți ale soluțiilor ecuației (1) în cazurile cînd mulțimile E și F sînt dotate cu diferite structuri algebrico-topologice. Astfel principala teoremă a acestei note este aceea care stabilește relația funcțională între partea pară și partea impară a unei funcții f definite pe un grup abelian aditiv G și cu valori într-o algebră asociativă B peste un corp oarecare K , f verificînd ecuația funcțională (1).

Ultima teoremă se referă la o inecuație funcțională de tipul cosinusului.

2. Noi începem cu o teoremă care are la bază rezultatele lui ([8]).

Teorema 1. Fie H spațiu Hilbert oarecare, $\mathfrak{N}(H)$ mulțimea operatorilor normali mărginiți de la H în H , $\mathfrak{L}(H)$ mulțimea operatorilor liniari mărginiți de la H în H și aplicațiile $N: R \rightarrow \mathfrak{N}(H)$, $F: R \rightarrow \mathfrak{L}(H)$ cu proprietățile :

i) 1 nu este valoare proprie a lui $N(s)$, $\forall s \in R$,

ii) $\exists t_0 \in R$, încît operatorul $F^{-1}(t_0)$ este mărginit și definit a.p.t.,

iii) F este slab continuă pe R ,

iv) $F(t)$ și $N(s)$ verifică ecuația operatorială

$$F(t+s) + F(t-s) = 2F(t)N(s). \quad (2)$$

Atunci $F(t) = A \cos tN + B \sin tN$, $N(t) = \cos tN$, $\forall t \in R$ în care $N \in \mathfrak{N}(H)$ nu depinde de t , iar A și B sînt operatori autoadjuncți și permutabili definiți pe H .

Demonstrație. Făcând $s=0, t=t_0$, din (2) găsim $F(t_0)=F(t_0)N(0)$, de unde $N(0)=E$ (operatorul identic). În baza ipotezei ii), tot din (2) deducem

$$N(s)=F^{-1}(t_0)[F(t_0+s)+F(t_0-s)]/2, \quad (3)$$

din care ușor se deduce că $N(s)$ verifică ecuația de forma (1).

Din ipoteza iii) și (3) deducem că $N(t)$ este slab continuă pe R . Acum din slab continuitatea lui $N(t)$ și din $N(0)=E$, în baza teoremei 2 din ([7]) care se bazează pe teorema de descompunere spectrală a unui operator normal ([4], p. 43) găsim că

$$N(t)=\cos tN, \quad \forall t \in R. \quad (4)$$

În acest fel (2) devine

$$F(t+s)+F(t-s)=2F(t)\cos sN \quad (5)$$

Notăm acum prin $F_1(t)$ și $F_2(t)$ partea pară respectiv impară a lui $F(t)$.

Atunci (5) conduce la ecuațiile

$$F_1(t+s)+F_1(t-s)=2F_1(t)\cos sN, \quad (6)$$

$$F_2(t+s)+F_2(t-s)=2F_2(t)\cos sN. \quad (7)$$

Pentru $t=0$, din (6) obținem $F_1(s)=A\cos sN$, unde $A=F_1(0)=F(0)$.

Ținând cont că $F_2(t)$ este impară, schimbând t cu s în (7) și adunând relația obținută la (7) vom obține

$$F_2(t+s)=F_2(t)\cos sN+F_2(s)\cos tN \quad (8)$$

Din (8), după un calcul simplu se ajunge la identitatea

$$F_2[t+(u+v)]=F_2[(t+u)+v], \quad \forall t, u, v \in R, \quad (9)$$

care împreună cu (8) conduce la egalitatea

$$F_2(t)\sin uN\sin vN=F_2(v)\sin tN\sin uN \quad (10)$$

Aici luăm $u=v=s/2$ și obținem

$$F_2(t)[E-N(s)]=2F_2(s/2)\sin[(s/2)N]\sin tN, \text{ de unde}$$

$$F_2(t) \doteq B\sin tN,$$

unde

$$B=2F_2(s/2)\sin[(s/2)N]/[E-N(s)].$$

În acest fel am obținut $F(t)=A\cos tN+B\sin tN$, $N(t)=\cos tN$ și teorema este verificată.

Teorema 2. Fie $f:G \rightarrow B$, G fiind un grup abelian aditiv, iar B o algebră asociativă peste un corp oarecare K , în care 2 este diferit de zero, f satisfăcând (1), $\forall t, s \in R$ și $f(0)=e$ (e -elementul unitate). Dacă $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt respectiv partea pară și impară a lui $f(t)$, atunci între ele există relația funcțională

$$f_2(t+s)+f_2(t-s)=2f_2(t)f_1(s), \quad \forall t, s \in G. \quad (11)$$

Demonstrație. Făcând $t=s=0$ în (1) și ținînd cont că $f(0)=e$, găsim (12) $e^2=e$ (deoarece $2 \neq 0$ în K).

În (1) luînd $s=0$, găsim

$$f(t)=f(t)e, \quad \forall t \in G \quad (2 \neq 0 \text{ în } K). \quad (13)$$

Fie acum $f_1(t)$ și $f_2(t)$ din teoremă, adică

$$f_1(t) = [f(t) + f(-t)]/2,$$

$f_2(t) = [f(t) - f(-t)]/2, \forall t \in G$. Luînd acum $t=0$, din (1) obținem

$$f_1(s) = e f(s), \forall s \in G. \quad (14)$$

Deoarece $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$, ținînd cont de (14) avem că $f_1(s) = e f(s) = e[f_1(s) + f_2(s)] = e f_1(s) + e f_2(s)$. Cum funcțiile $f_1(s)$ și $e f_2(s)$ sînt pare, rezultă

$$e f_2(s) \equiv 0, \forall s \in G. \quad (15)$$

Înmulțind la stînga (14) cu e și ținînd cont de (12) obținem

$$e f_1(s) = e^2 f(s) = e f(s) = f_1(s), \forall s \in G. \quad (16)$$

Acum din (13) după un raționament analog vom găsi

$$(a) f_1(s) e = f_1(s), \quad b) f_2(s) e = f_2(s), \quad \forall s \in G. \quad (17)$$

Din (17) (a) și (15) și la fel din (17) (b) și (15) se obțin relațiile

$$f_1(t) f_2(s) = [f_1(t) e] f_2(s) = f_1(t) [e f_2(s)] = 0, \quad (18)$$

$$f_2(t) f_2(s) = 0, \quad \forall t, s \in G. \quad (19)$$

Folosind acum (1), (14) și (18), vom obține

$$f_1(t+s) + f_1(t-s) = 2f_1(t) f_1(s), \quad \forall t, s \in G. \quad (20)$$

Dacă $f(0)=0$, din (13) rezultă $f(t) \equiv 0$. Dacă însă $e \neq 0$, atunci e este identitate pentru subalgebra $A = \{a \in B \mid ae = ea = a\}$, și din (16) și (17) (a) găsim $f_1(s) \in A$, $\forall s \in G$. În acest fel $f_1(s)$ se poate considera ca o funcție definită pe G și cu valori în subalgebra $A \subset B$, care este soluție a lui (1) sau (20) cu condiția $f_1(0) = e$, identitate a lui A . Luînd acum în considerare (18) și (19) se obține:

$$\begin{aligned} f_2(t+s) + f_2(t-s) &= f(t+s) + f(t-s) - f_1(t+s) - f_1(t-s) = \\ &= 2f(t)f(s) - 2f_1(t)f_1(s) = 2f_2(t)f_1(s), \quad \forall t, s \in G \end{aligned} \quad (21)$$

ceea ce termină demonstrația teoremei.

Teorema 3. Fie $f: R \rightarrow R$ o funcție continuă cu proprietățile:

- i) $f(0) = 1, f'(0) = 0$,
- ii) $f''(t)$ există și este integrabilă pe orice vecinătate V a originii,
- iii) f verifică inecuația funcțională de tipul cosinusului.

$$f(t+s) + f(t-s) \leq 2f(t)f(s), \quad \forall t, s \in R. \quad (22)$$

Atunci f este o funcție pară ce are forma

$$f(t) \leq ch \sqrt{A} t, \quad \forall t \in R, \text{ unde } A = |f''(0)|.$$

Demonstrație. Din (22) luînd $t=0$, se obține $f(-s) \leq f(s)$ iar de aici, înlocuind s prin $-s$ rezultă inegalitatea opusă, de unde rezultă că orice soluție a lui (22) este o funcție pară. Fie acum $h \in R$, suficient de mic. Atunci (22) și $f(0)=1$ implică inegalitatea,

$$f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) \leq f(t) [2f(h) - 2] = f(t) [f(h) + f(-h) - 2f(0)],$$

iar de aici pentru h suficient de mic avem,

$$[f(t+h)+f(t-h)-2f(t)]/h^2 \leq f(t)[f(h)+f(-h)-2f(0)]/h^2. \quad (23)$$

Aici trecînd la limită pentru $h \rightarrow 0$, în baza lui ii), pentru orice $t \in V$ avem

$$f''(t) \leq f(t)f''(0) = Af(t), \text{ unde } A = |f''(0)|. \quad (24)$$

Din continuitatea lui f și $f(0)=1$, rezultă că va exista un număr $\delta > 0$, astfel că $f(t) > 0$, $\forall t \in [0, \delta] \subset V$. Deoarece $f'(0)=0$ și $f''(t)$ este integrabilă pe V , integrînd de două ori relația (24) avem :

$$f'(y) = \int_0^y f''(t) dt \leq A \int_0^y f(t) dt, \quad \forall y \in [0, \delta];$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y) dy \leq A \int_0^x \left[\int_0^y f(t) dt \right] dy = A \int_0^x \int_t^x f(t) dy dt = A \int_0^x (x-t) f(t) dt.$$

Deoarece $f(t) > 0$, $\forall t \in [0, \delta]$, noi avem :

$$f(x) - f(0) \leq A \int_0^x (x-t) f(t) dt. \quad (25)$$

Considerăm acum spațiul liniar normat $C[0, +\infty)$ dotat cu structura uzuală și operatorul liniar $L : C[0, +\infty) \rightarrow C[0, +\infty)$ definit astfel

$$L[f(x)] = 1 + A \int_0^x (x-t) f(t) dt, \quad \forall x \geq 0. \quad (26)$$

Operatorul L este evident monoton pe $C[0, +\infty)$, adică $L[f] \leq L[g]$, dacă $f \leq g$. Mai mult, L este un operator de contracție, deoarece $\forall f, g \in C[0, l]$, $\|L[f] - L[g]\| = \sup_{x \in [0, l]} \left| A \int_0^x (x-t) f(t) dt - A \int_0^x (x-t) g(t) dt \right| \leq A \|f - g\| \int_0^x (x-t) dt = Ax^2 \|f - g\|/2 < \alpha \|f - g\|$, de îndată ce $Ax^2/2 < \alpha < 1$.

Fie acum F punctul fix al operatorului de contracție L . Atunci

$$F(x) = 1 + A \int_0^x (x-t) F(t) dt \quad (27)$$

Deoarece această ecuație integrală este echivalentă cu problema cu condiții inițiale

$$f''(t) = Af(t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad (28)$$

care are soluția unică $f(t) = ch \sqrt{A} t$, rezultă că $F(x) = ch \sqrt{A} x$.

Acum pentru că operatorul de contracție L este crescător în sensul definit mai sus, din relația (25) deducem

$$f(t) \leq L[f](t) \leq L^2[f](t) \leq \dots \leq L^n[f](t), \quad \forall t \in [0, l] \quad (29)$$

de unde $f(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L^n[f](t) = F(t) = ch \sqrt{A} t$, $\forall t \in [0, l]$, ceea ce înseamnă că are loc inegalitatea

$$f(t) \leq ch \sqrt{A} t, \quad \forall t \in [0, l]. \quad (30)$$

Pentru a încheia demonstrația, arătăm că (30) are loc $\forall t \in R$.

Din (22), pentru $t=s$ avem $f(2t) \leq 2f^2(t) - 1 \leq 2ch^2\sqrt{A}t - 1 = ch\sqrt{A}2t$, $\forall t \in [0, l]$.

Un simplu raționament prin inducție conduce la :

$$f(2^n t) \leq ch\sqrt{A}(2^n t), \quad \forall t \in [0, l]. \quad (31)$$

Pentru a arăta că $f(t) \leq ch\sqrt{A}t$, $\forall t \in R$, procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $t \in R^+$, oricât de mare, astfel ca $f(t) > ch\sqrt{A}t$. Atunci se poate determina un număr $n \in N$, astfel ca $0 < t < 2^n l$. Punînd acum $t/2^n = x$, noi găsim $ch\sqrt{A}t < f(t) = f(2^n x) \leq ch\sqrt{A}(2^n x) = ch\sqrt{A}t$, ceea ce este absurd și deci rămîne $f(t) \leq ch\sqrt{A}t$, $\forall t \in R^+$. Deoarece $f(t)$ și $ch\sqrt{A}t$ sînt pare, rezultă

$$f(t) \leq ch\sqrt{A}t, \quad \forall t \in R \quad (32)$$

și cu aceasta teorema este verificată.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Aczel, J., Lectures on Functional Equations and their Applications, (Academic Press, New-York-London 1966).
- [2] Babescu, Gh., On the D'Alembert's Functional Equation in Banach Algebras, Bul. șt. tehn. IPT, Tom 21 (35), Fasc. 2—1976.
- [3] Crstici, B., ș.a., Asupra funcțiilor reale de tip cosinus definite pe un grup, Bul. șt. și tehn. IPT, Tom 15 (29), Fasc. 2—1970.
- [4] Foiaș, C., Măsurile spectrale și semispectrale, Stud. Cercet. Mat. Tom 18, Nr. 1. 1966.
- [5] Gheorghiu, O.E., B. Crstici, Cîteva considerații privind ecuația funcțională Jensen-Carmichael, Seminarul matematic IPT., 2/1974.
- [6] Hosszú, M., Some remarks on the cosine functional equation, Publ. Math., Tomus 16, Fasc. 1—4, 1969.
- [7] Kannappan, P.I., The Functional Equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y)$ for Groups, Proc. Amer. Math. Soc. XIX (1968), 69—74.
- [8] Kurepa, S., Acosine Functional Equation in Hilbert space, Canad. J. Math., 12 (1960).
- [9] Kurepa, S., A Cosine Functional in Banach Algebras, Acta Sci Math. (Szeged) 23, 255—267 (1962).
- [10] Yosida, K., Funcționalnii analiz, Moskva, 1967.

EINIGE ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG VON KOSINUS

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden einige Eigenschaften der Lösungen einer Funktionalgleichung von Kosinus

$$f(t+s) + f(t-s) = 2f(t)f(s) \text{ gebracht,}$$

im Falle in welchem $f: E \rightarrow F$, wobei die Mengen E und F verschiedene algebraische und topologische Strukturen haben.

SUPORTURILE TOPOLOGICE ALE MĂSURILOR DE PROBABILITATE GAUSSIENE ÎN SUBSPAȚII ALE SPAȚIULUI MĂSURILOR REALE ȘI MĂRGINITE

DE

OCTAVIAN LIPOVAN

1°. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, mărginită și închisă. În [3] au fost introduse subspațiile Banach separabile $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$ și $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$, ale spațiului Banach $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$ al tuturor măsurilor reale și mărginite definite pe $\mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega$.

Fie $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}$, $j=0, 2$, σ -algebra mulțimilor boreliene din spațiul Banach $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$ iar $\mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$, $j=0, 2$, dualul său topologic.

Dacă τ este o măsură de probabilitate definită în $(\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j=0, 2$, astfel că

$$\int \|\lambda\|^2 d\tau(\lambda) < \infty, \quad \lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$$

atunci se știe [1] că operatorul de covarianță :

$$S : \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega) \rightarrow \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \quad (j=0,2)$$

al măsurii τ este :

$$S(\mathfrak{F}) = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} (\mu - \mu_0) \mathfrak{F} (\mu - \mu_0) d\tau(\mu), \quad \mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$$

unde

$$\mu_0 \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega),$$

$j=0,2$ este măsura medie pentru τ :

$$\mu_0 = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} \lambda d\tau(\lambda).$$

2°. Conținutul acestei lucrări constă în exprimarea suportului topologic al unei măsuri de probabilitate gaussiene, definită pe σ -algebra $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}$, a submulțimilor boreliene din spațiile $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$, $j=0,2$, cu ajutorul măsurii sale medii și a operatorului său de covarianță S .

Definiția 1. Fie τ o măsură de probabilitate în $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$, $j=0,2$. Prin suport topologic $\mathfrak{D}$, al măsurii τ , înțelegem mulțimea acelor $\lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$, cu proprietatea că pentru orice mulțime deschisă U , care conține pe λ , să avem $\tau(U) > 0$.

Definiția 2. Măsura de probabilitate τ se numește gaussiană dacă pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, $\tau \mathcal{F}^{-1}$, este o măsură gaussiană pe axa reală.

Ideile care au stat la baza demonstrațiilor care urmează aparțin lui B. Rajput, care a formulat și demonstrat în [6] rezultate analoage dar în spațiile L^p , $p \geq 1$, unde operatorul de covarianță și elementul mediu sînt introduse cu definiții speciale.

Teorema 1. Suportul topologic $\mathfrak{D}$, al unei măsuri de probabilitate τ din spațiul $\mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, admite următoarea reprezentare :

$$\mathfrak{D} = \mu + \overline{S(\mathcal{M}_2^*)}$$

unde μ_0 este măsura medie iar S operatorul de covarianță al măsurii τ .

Demonstrație. Fie $T : \mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \rightarrow \mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, o aplicație continuă definită prin $T(\lambda) = \lambda - \mu_0$, pentru orice $\lambda \in \mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, adică o translație. Atunci măsura de probabilitate τT^{-1} este o măsură gaussiană în $(\mathcal{M}_2, \mathfrak{B}_{\mathcal{M}_2})$ cu măsura medie zero și operatorul de covarianță S . Într-adevăr, deoarece pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, avem :

$$\mathcal{F}(\mu_0) = \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}(\lambda) d\tau(\lambda),$$

notînd cu $\mu = T(\lambda) = \lambda - \mu_0$, rezultă :

$$\int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}(\mu) d\tau T^{-1}(\mu) = \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}(\lambda - \mu_0) d\tau(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}(\lambda) d\tau(\lambda) - \mathcal{F}(\mu_0) = 0 = \mathcal{F}(0)$$

deci măsura medie pentru τT^{-1} este zero.

Fie S' operatorul de covarianță al măsurii τT^{-1} . Avem : pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$; $\mathcal{F}(S'\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}^2(\mu) d\tau T^{-1}(\mu) = \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{F}^2(\lambda - \mu_0) d\tau(\lambda) = \mathcal{F}(S\mathcal{F})$. De aici avem $S' = S$.

Măsura τT^{-1} este gaussiană deoarece [4] avem următoarea exprimare a funcției sale caracteristice pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{F}) &= \int_{\mathcal{M}_2} e^{i\mathcal{F}(\mu)} d\tau T^{-1}(\mu) = \int_{\mathcal{M}_2} e^{i\mathcal{F}(\lambda - \mu_0)} d\tau(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_2} e^{i\mathcal{F}(\lambda)} d\tau(\lambda) e^{i\mathcal{F}(\mu_0)} = \\ &= e^{\left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}(S\mathcal{F}) + i\mathcal{F}(\mu_0)\right]} \cdot e^{i\mathcal{F}(\mu_0)} = e^{-\frac{1}{2} \mathcal{F}(S\mathcal{F})}. \end{aligned}$$

Să notăm cu $\mathcal{K}$, suportul topologic al măsurii τT^{-1} . Deoarece $\mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ este un spațiu vectorial topologic, va fi suficient să arătăm că :

$$\mathcal{K} = \overline{S(\mathcal{M}_2^*)}.$$

Faptul că $\mathcal{K}$ este un subspațiu liniar închis a lui $\mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ se știe din [1, pag. 892]. Pentru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, să notăm cu $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ anihilatorul lui $\mathcal{A}$ în $\mathcal{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, adică mulțimea :

$$\mathcal{A}^\perp = \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2^*, \mathcal{F}(\mu) = 0 \text{ pentru orice } \mu \in \mathcal{A}\}.$$

În virtutea teoremei lui Hahn-Banach, va fi suficient să arătăm că :

$$\mathfrak{K}^\perp = \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}^\perp.$$

Fie $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{K}^\perp$, iar Φ funcția caracteristică a lui τT^{-1} . Se verifică ușor că $\Phi(\mathcal{T}_0) = 1$. Pe de altă parte, am văzut mai sus că : $\Phi(\mathcal{T}_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \mathcal{T}_0(S\mathcal{T}_0) \right]$. Aceasta înseamnă că $\mathcal{T}_0(S\mathcal{T}_0) = 0$, deci $\mathcal{T}_0(S\mathcal{Q}) = 0$ pentru orice $\mathcal{Q} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și deci $\mathcal{T}_0 \in \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}^\perp$ și deci $\mathfrak{K}^\perp \subseteq \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}^\perp$.

Fie $\mathcal{T}_0 \in \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}^\perp$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci avem :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha \mathcal{T}_0) &= \int_{\mathfrak{K}} e^{i\alpha \mathcal{T}_0(\mu)} d\tau T^{-1}(\mu) = \int_{\mathfrak{K} + \mu_0} e^{i\alpha \mathcal{T}_0(\lambda - \mu_0)} d\tau(\lambda) = e^{-i\alpha \mathcal{T}_0(\mu_0)} \int_{\mathfrak{K} + \mu_0} e^{i\alpha \mathcal{T}_0(\lambda)} d\tau(\lambda) = \\ &= e \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \mathcal{T}_0(S\mathcal{T}_0) + i\alpha \mathcal{T}_0(\mu) \right] \cdot e^{-i\alpha \mathcal{T}_0(\mu_0)} = e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 \mathcal{T}_0(S\mathcal{T}_0)} = 1. \end{aligned}$$

deoarece $\mathcal{T}_0(S\mathcal{T}_0) = 0$. Atunci :

$$\int_{\mathfrak{K}} [\cos(\alpha \mathcal{T}_0(\mu)) + i \sin(\alpha \mathcal{T}_0(\mu))] d\tau T^{-1}(\mu) = 1,$$

de unde rezultă că :

$$\int_{\mathfrak{K}} [1 - \cos(\alpha \mathcal{T}_0(\lambda))] d\tau T^{-1}(\lambda) = 0. \quad (1)$$

Fie : $\psi_\alpha(\lambda) = 1 - \cos(\alpha \mathcal{T}_0(\lambda))$. Se vede că ψ_α este continuă pe $\mathfrak{K}$ și nenegativă. Din definiția suportului topologic și relația (1), vom deduce că $\psi_\alpha(\lambda) = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathfrak{K}$.

Dar α este arbitrar și deci $\mathcal{T}_0(\lambda) = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathfrak{K}$.

Deci $\mathcal{T}_0 \in \mathfrak{K}^\perp$ și $\overline{S(\mathfrak{M}_2^*)} \subset \mathfrak{K}^\perp$. Deoarece $T^{-1}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{D}$, rezultă că $T(\mathfrak{D}) = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{D} - \mu_0 = \mathfrak{K}$ sau $\mathfrak{D} = \mu_0 + \mathfrak{K}$ și teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. Suportul topologic $\mathfrak{D}$, al unei măsuri de probabilitate τ din spațiul $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, admite următoarea reprezentare :

$$\mathfrak{D} = \mu_0 + (S^{-1}\{0\})^\perp$$

unde μ_0 este măsura medie a lui τ , S este operatorul său de covarianță iar $(S^{-1}\{0\})^\perp$ este anihilatorul lui $(S^{-1}\{0\})$ în $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

Demonstrație. Din teorema 1, va fi suficient să arătăm că :

$$(S^{-1}\{0\})^\perp = \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}.$$

Fie $\lambda \in S(\mathfrak{M}_2^*)$. Atunci există $\{\mathcal{T}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ astfel că $S(\mathcal{T}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$. Deoarece S este simetric vom vedea că $\mathcal{Q}(S\mathcal{T}_n) = \mathcal{T}_n(S(\mathcal{Q})) = 0$ pentru orice $\mathcal{Q} \in (S^{-1}\{0\})$.

Deoarece $\mathcal{Q}$ este continuă rezultă că $\mathcal{Q}(\lambda) = 0$ pentru orice $\mathcal{Q} \in (S^{-1}\{0\})$. Deci $\lambda \in (S^{-1}\{0\})^\perp$ și $\overline{S(\mathfrak{M}_2^*)} \subseteq (S^{-1}\{0\})^\perp$.

Să arătăm în continuare că $(S^{-1}\{0\})^\perp \subseteq \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}$, arătând că dacă $\lambda \notin \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}$ rezultă că $\lambda \notin (S^{-1}\{0\})^\perp$.

Fie $\lambda \notin \overline{S(\mathfrak{M}_2^*)}$. Din teorema lui Hahn Banach, va exista $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, astfel că $\mathcal{T}(\lambda) \neq 0$ și $\mathcal{T}(S(\mathcal{Q})) = 0$ pentru orice $\mathcal{Q} \in \mathfrak{M}_2^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$. Deoarece $\mathcal{T}(S(\mathcal{Q})) = \mathcal{Q}(S(\mathcal{T}))$, rezultă că $S(\mathcal{T}) = 0$. De aceea $\mathcal{T} \in (S^{-1}\{0\})$ și deoarece $\mathcal{T}(\lambda) \neq 0$ rezultă că $\lambda \notin (S^{-1}\{0\})^\perp$.

Vom da în continuare o teoremă de reprezentare a suportului unei măsurii gaussiene din spațiul $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ cu ajutorul măsurilor degenerate δ_{q_j} din $\mathbb{R}^P$.

Teorema 3. Suportul topologic $\mathfrak{D}$, al unei măsurii de probabilitate τ din spațiul $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, admite următoarea reprezentare :

$$\mathfrak{D} = \mu_0 + S_p \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{M}_j} \mathfrak{T}_j(\lambda) \mathfrak{T}_n(\lambda) d\tau(\lambda) \right| \delta_{q_j} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

unde μ_0 este măsura medie a lui τ , $\{\delta_{q_j}\}_{j=1}^{\infty}$ baza numărabilă a spațiului $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ iar $\{\mathfrak{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ funcționalele coordonate.

Demonstrație. Se știe din [2] că operatorul de covarianță S al măsurii de probabilitate τ , este dat de expresia :

$$S(\mathfrak{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{\mathfrak{M}_0} \mathfrak{T}_n(\lambda) \mathfrak{T}(\lambda) d\tau(\lambda) \right] \delta_{q_n}, \quad \mathfrak{T} \in \mathfrak{M}_0^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega).$$

Din teorema 1, va fi suficient să arătăm :

$$\overline{S(\mathfrak{M}_0^*)} = \overline{S_p \{S(\mathfrak{T}_n)\}_{n=1}^{\infty}}$$

Este clar că $\overline{S_p \{S(\mathfrak{T}_n)\}_{n=1}^{\infty}} \subseteq \overline{S(\mathfrak{M}_0^*)}$. Incluziunea inversă $\overline{S(\mathfrak{M}_0^*)} \subseteq \overline{S_p \{S(\mathfrak{T}_n)\}_{n=1}^{\infty}}$ rez. Ită din faptul că acoperirea liniară $S_p \{\mathfrak{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ este densă în $\mathfrak{M}_0^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ în raport cu topologia slabă, iar operatorul S este secvențial continuu prin raport cu topologia slabă din $\mathfrak{M}_0^*(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \mu)$ și topologia normei din $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Jain N.C. and Kallianpur G. „Norm convergent expansion for Gauss processes in Banach spaces“. Proc. Amer. Math. Soc. 25/1970/890—895.
- [2] Lipovan O. „Operatorul de covarianță al măsurilor de probabilitate definite pe spațiul Banach al măsurilor reale și mărginite“. Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Fasc. 2. 1977.
- [3] Lipovan O. „Asupra măsurilor de probabilitate din subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite“. Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică. Fasc. 1. 1978.
- [4] Lipovan O. „Măsuri de probabilitate gaussiene în subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite“. Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică. Tom 23/37 /ya apare/.
- [5] Neveu J. „Bases mathématiques du calcul des probabilités“. Masson et Cie Editures Paris, 1964.
- [6] Rajput B. S. /1971/ „Gaussian Measures on L^p space, $p \geq 1$ “ Mimeo Series No. 782, Department of Statistics, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [7] Vakhania N. /1965/ „Sur une propriété des répartitions normales de probabilités dans les espaces L^p , $1 \leq p < \infty$, at H.“. C.R. Acad. Sci. 260, 1 334—1 336.

LES SUPPORTS TOPOLOGIQUES DES MESURES DE PROBABILITÉ DE GAUSS DANS DES SPOUS-ESPACES DE L'ESPACE DES MESURES RÉELLES ET BORNÉES.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on exprime le support topologique d'une mesure de probabilité de Gauss, à l'aide de sa mesure moyenne et de son opérateur de covariance.

MĂSURI DE PROBABILITATE GAUSSIENE, ÎN SUBSPAȚII ALE SPAȚIULUI BANACH AL MĂSURILOR REALE ȘI MĂRGINITE

DE

OCTAVIAN LIPOVAN

1°. În prezenta lucrare, folosind operatorul de covarianță S și măsura medie μ_0 , care se asociază unei măsuri de probabilitate τ , se studiază produsul de convoluție a două măsuri gaussiene din spațiul $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, ($j=0,2$), măsura produs din spațiul:

$$\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \times \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega),$$

precum și măsurile gaussiene din spațiul $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, mărginită și închisă. În [3] au fost introduse spațiile Banach separabile $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ și $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, unde:

$$\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \subset \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega).$$

Fie $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}$, σ — algebra mulțimilor boreliene din spațiul Banach $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ iar $\mathfrak{M}_j^*$ dualul său topologic $j=0,2$.

Dacă τ este o măsură de probabilitate definită în $(\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j=0,2$ astfel că: $\int_{\mathfrak{M}_j} \|\lambda\|^2 d\tau(\lambda) < \infty$, $\lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ atunci se știe [2] că operatorul de covarianță $S: \mathfrak{M}_j^* \longrightarrow \mathfrak{M}_j$, ($j=0,2$) al măsurii τ este:

$$S(\mathcal{F}) = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} (\mu - \mu_0) \mathcal{F}(\mu - \mu_0) d\tau(\mu), \quad \mathcal{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega),$$

unde $\mu_0 \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, $j=0,2$ este măsura medie pentru τ :

$$\mu_0 = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} \lambda d\tau(\lambda).$$

Definiția 1. O măsură de probabilitate τ , definită în $(\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j=0,2$, se numește Gaussiană, dacă pentru orice $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, $j=0,2$, $\tau \mathcal{F}^{-1}$ este o măsură Gaussiană pe axa reală.

Definiția 2. Se numește funcție caracteristică Φ , a măsurii τ , aplicația $\Phi: \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, $j=0,2$, definită prin: $\Phi(\mathcal{F}) = \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathcal{F}(\lambda)} d\tau(\lambda)$, pentru orice $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

Se poate verifica imediat, următorul rezultat :

Lemă. Dacă Φ este funcția caracteristică a măsurii τ , atunci Φ , are forma :

$$\Phi(\mathcal{F}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}(S(\mathcal{F})) + i\mathcal{F}(\mu_0) \right], \quad (1)$$

pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ $j=0,2$, unde μ_0 este măsura medie a măsurii τ , iar S este operatorul de covarianță.

Reciproc, dacă Φ este funcția caracteristică a unei măsuri de probabilitate τ pe $(\mathcal{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathcal{M}_j})$, $j=0,2$, dată de relația (1), unde $\mu_0 \in \mathcal{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, iar $S: \mathcal{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega) \rightarrow \mathcal{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ $j=0,2$, este un operator, liniar, nenegativ, atunci τ este Gaussiană, iar μ_0 este măsura sa medie. În plus dacă S este simetric, atunci S este operatorul de covarianță al lui τ .

Teorema 1. Fie τ_1, τ_2 , două măsuri Gaussiene, definite în $(\mathcal{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathcal{M}_j})$, $j=0,2$. Fie μ_1^0, S_1 , respectiv μ_2^0, S_2 , măsurile medii și operatorii de covarianță ai măsurilor τ_1 și τ_2 . Dacă $\tau_1 * \tau_2$ este convoluția celor două măsuri, atunci $\tau_1 * \tau_2$ este o măsură Gaussiană cu măsura medie $\mu_1^0 + \mu_2^0$ și operatorul de covarianță $S_1 + S_2$.

Demonstrație. Pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_j^*(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$, $j=0,2$, avem :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mu_1^0) &= \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda) d\tau_1(\lambda); \quad \mathcal{F}(\mu_2^0) = \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda) d\tau_2(\lambda). \text{ Dar } \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda) d\tau_1 * \tau_2(\lambda) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda + \mu) d\tau_1 \times \tau_2(\lambda, \mu) = \int_{\mathcal{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda + \mu) d\tau_2(\mu) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathcal{M}_j} [\mathcal{F}(\lambda) + \mathcal{F}(\mu)] d\tau_2(\mu) = \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda) d\tau_1(\lambda) + \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\mu) d\tau_2(\mu) = \\ &= \mathcal{F}(\mu_1^0) + \mathcal{F}(\mu_2^0) = \mathcal{F}(\mu_1^0 + \mu_2^0). \end{aligned}$$

Rezultă deci că $\mu_1^0 + \mu_2^0$ este măsura medie pentru $\tau_1 * \tau_2$. Pentru orice $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_j(\Omega, \mathcal{E}_{f_1 \dots f_p}^{(P)} \cap \Omega)$ avem :

$$\mathcal{F}(S_1(\mathcal{F})) = \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\lambda - \mu_1^0) d\tau_1(\lambda); \quad \mathcal{F}(S_2(\mathcal{F})) = \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\mu - \mu_2^0) d\tau_2(\mu).$$

Dacă S este operatorul de covarianță pentru $\tau_1 * \tau_2$, atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(\mathcal{F})) &= \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2[\lambda - (\mu_1^0 + \mu_2^0)] d\tau_1 * \tau_2(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\lambda + \mu - \\ &- \mu_1^0 - \mu_2^0) d\tau_2(\mu) = \int_{\mathcal{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2[(\lambda - \mu_1^0) + (\mu - \mu_2^0)] d\tau_2(\mu) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathcal{M}_j} [\mathcal{F}^2(\lambda - \mu_1^0) + \mathcal{F}^2(\mu - \mu_2^0) + 2\mathcal{F}(\lambda - \mu_1^0)\mathcal{F}(\mu - \mu_2^0)] d\tau_2(\mu) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_j} [\mathcal{F}^2(\lambda - \mu_1^0) + \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\mu - \mu_2^0) d\tau_2(\mu) + 2\mathcal{F}(\lambda - \mu_1^0) \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\mu - \mu_2^0) d\tau_2(\mu)] d\tau_1(\lambda) = \\ &= \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\lambda - \mu_1^0) d\tau_1(\lambda) + \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}^2(\mu - \mu_2^0) d\tau_2(\mu) + 2 \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\lambda - \mu_1^0) d\tau_1(\lambda) \cdot \\ &\cdot \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{F}(\mu - \mu_2^0) d\tau_2(\mu) = \mathcal{F}(S_1(\mathcal{F})) + \mathcal{F}(S_2(\mathcal{F})) = \mathcal{F}[(S_1 + S_2)(\mathcal{F})], \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că $S = S_1 + S_2$. Faptul că $\tau_1 * \tau_2$ este o măsură Gaussiană, rezultă din forma funcției sale caracteristice. Într-adevăr;

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{F}) &= \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\lambda)} d\tau_1 * \tau_2(\lambda) = \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\lambda+\mu)} d\tau_1 \times \tau_2(\lambda, \mu) = \\ &= \int_{\mathfrak{M}_j} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathfrak{M}_j} [e^{i\mathfrak{F}(\lambda)} \cdot e^{i\mathfrak{F}(\mu)}] d\tau_2(\mu) = \int_{\mathfrak{M}_j} [e^{i\mathfrak{F}(\lambda)} \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\mu)} d\tau_2(\mu)] d\tau_1(\lambda) = \\ &= \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\lambda)} d\tau_1(\lambda) \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\mu)} d\tau_2(\mu) = \Phi_1(\mathfrak{F}) \cdot \Phi_2(\mathfrak{F}),\end{aligned}$$

unde Φ_1 și Φ_2 sint respectiv $\Phi_1(\mathfrak{F}) = \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\lambda)} d\tau_1(\lambda)$; $\Phi_2(\mathfrak{F}) = \int_{\mathfrak{M}_j} e^{i\mathfrak{F}(\mu)} d\tau_2(\mu)$.

Dar :

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathfrak{F}) \cdot \Phi_2(\mathfrak{F}) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \mathfrak{F}(S_1(\mathfrak{F})) + i\mathfrak{F}(\mu_1^0) \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \mathfrak{F}(S_2(\mathfrak{F})) + i\mathfrak{F}(\mu_2^0) \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \mathfrak{F}[(S_1 + S_2)\mathfrak{F}] + i\mathfrak{F}(\mu_1^0 + \mu_2^0) \right]\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează complet teorema.

Teorema 2. Fie τ_1 și τ_2 , două măsuri Gaussiene, definite în $(\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_0})$ și respectiv $(\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2})$.

Fie μ_1^0 , S_1 , măsura medie și operatorul de covarianță pentru τ_1 iar μ_2^0 , S_2 respectiv pentru măsura τ_2 .

Atunci $\tau_1 \times \tau_2$ este o măsură Gaussiană în spațiul produs

$$(\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega) \times \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_0} \times \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2})$$

care are măsura medie (μ_1^0, μ_2^0) și operatorul de covarianță $S: (\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2)^* \rightarrow \mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2$, definit prin : $S(\mathcal{K}) = (S(\mathfrak{F}), S_2(\mathfrak{G}))$, unde $\mathcal{K} \in (\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2)^*$, cu identificarea uzuală a lui $(\mathfrak{M}_1^* \times \mathfrak{M}_2^*)$ cu $(\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2)^*$.

Demonstrație. Identificînd $(\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2)^*$ cu $(\mathfrak{M}_0^* \times \mathfrak{M}_2^*)$ și folosind teorema lui Fubini, se arată ușor că funcția caracteristică a măsurii produs $\tau_1 \times \tau_2$ este de forma :

$$\Phi(\mathcal{K}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \mathcal{K}(S(\mathcal{K})) + i\mathcal{K}(\mu_1^0, \mu_2^0) \right] \quad \mathcal{K} \in (\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_2)^*$$

și de aici rezultă afirmația teoremei.

Teorema 3. Fie $T: \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega) \rightarrow \mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega)$ aplicația canonică a spațiului Banach $\mathfrak{M}_2$, pe spațiul Banach cît $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0$, care este un operator liniar și continuu.

Fie τ , o măsură Gaussiană în $(\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2})$, cu măsura medie $\mu_0 \equiv 0$ și operatorul de covarianță S .

Atunci τT^{-1} , este o măsură Gaussiană în spațiul cît $(\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{f_1}^{(P)} \dots f_p \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0})$ cu elementul mediu zero, iar operatorul de covarianță TST^* , unde T^* este adjunctul operatorului T .

Demonstrație. Din ipoteză, avem pentru $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_2^*, \int_{\mathfrak{M}_2} \mathfrak{F}(\lambda) d\tau(\lambda) = 0$, iar $\mathfrak{F}(S(\mathfrak{F})) = \int_{\mathfrak{M}_2} \mathfrak{F}^2(\lambda) d\tau(\lambda)$, deoarece măsura medie $\mu_0 \equiv 0$.

Fie $\tau T^{-1} : \mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0 \rightarrow [0,1]$ și $\hat{\mathfrak{F}} \in (\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0)^*$. Deoarece $\hat{\mathfrak{F}}(T(\lambda)) = T^*(\hat{\mathfrak{F}})(\lambda)$ iar $T^*(\hat{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{M}_2^*$, $T(\lambda) = \hat{\lambda}$, avem :

$$\int_{\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0} \hat{\mathfrak{F}}(\hat{\lambda}) d(\tau T^{-1})(\hat{\lambda}) = \int_{\mathfrak{M}_2} \hat{\mathfrak{F}}(T(\lambda)) d\tau(\lambda) = 0,$$

ceea ce demonstrează faptul că τT^{-1} are elementul mediu $\hat{o}$. Să notăm cu S , operatorul de covarianță al măsurii τT^{-1} . Pentru $\hat{\mathfrak{F}} \in (\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0)^*$, arbitrară, vom avea :

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}}(S(\hat{\mathfrak{F}})) &= \int_{\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0} \hat{\mathfrak{F}}(\hat{\lambda}) d(\tau T^{-1})(\hat{\lambda}) = \int_{\mathfrak{M}_2} \hat{\mathfrak{F}}^2(T(\lambda)) d\tau(\lambda) = T^*(\hat{\mathfrak{F}})[ST^*(\hat{\mathfrak{F}})] = \\ &= \hat{\mathfrak{F}}[(TST^*)(\hat{\mathfrak{F}})], \end{aligned}$$

de unde rezultă egalitatea $S = TST^*$.

Pentru demonstrarea completă a teoremei, vom arăta forma funcției caracteristice $\Phi : (\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0)^* \rightarrow \mathbb{C}$, a măsurii τT^{-1} .

Pentru orice $\hat{\mathfrak{F}} \in (\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0)^*$, avem :

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{\mathfrak{F}}) &= \int_{\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0} e^{i\hat{\mathfrak{F}}(\hat{\lambda})} d\tau T^{-1}(\hat{\lambda}) = \int_{\mathfrak{M}_2} e^{i\hat{\mathfrak{F}}[T(\lambda)]} d\tau(\lambda) = \int_{\mathfrak{M}_2} e^{iT^*\hat{\mathfrak{F}}(\lambda)} d\tau(\lambda) = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} T^*\hat{\mathfrak{F}}(ST^*\hat{\mathfrak{F}})\right] = \exp\left[-\frac{1}{2} \hat{\mathfrak{F}}(TST^*\hat{\mathfrak{F}})\right] = \exp\left[-\frac{1}{2} \hat{\mathfrak{F}}(S(\hat{\mathfrak{F}}))\right]. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Lipovan O. „Asupra convergenței slabe a măsurilor de probabilitate pe spațiile funcțiilor integrabile Lebesgue-Stieltjes”. Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Fasc. 2. 1976.
- [2] Lipovan O. „Operatorul de covarianță al măsurilor de probabilitate, definite pe spațiul Banach al măsurilor reale și mărginite”. Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Fasc. 2. 1977.
- [3] Lipovan O. „Asupra măsurilor de probabilitate din subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite”. Buletinul științific al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică Fasc. 1. 1978.
- [4] Neveu J. „Bases mathématiques du calcul des probabilités”. Masson et C^{ie} Editures Paris, 1964.
- [5] Rajput B. S. /1971/ „Gaussian Measures on L^p Spaces, $p \geq 1$ ”. Mimeo Series No. 782, Department of Statistics, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [6] Rajput B. S. and Cambanis S. /1972/ „Gaussian processes and Gaussian measures”. Ann. Math. Statist.
- [7] Vakhanian N. /1965/ „Sur une propriété des répartitions normales de probabilités dans les espaces L^p et H^* ”. C.R. Acad. Sci 260. 1 334-1336.

MESURES DE PROBABILITÉ GAUSSIENNES DANS SOUS-ESPACES DE L'ESPACE BANACH DES MESURES RÉELLES ET BORNÉS

RESUMÉ

Dans le présent travail, utilisant l'opérateur de covariance S et la mesure moyenne μ_0 , qui correspond à une mesure de probabilité τ , on étudie le produit de convolution de deux mesures gaussiennes du espace $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{E}_{I_1 \dots I_p}^{(P)} \cap \Omega)$, $j=0,2$, la mesure produit du espace $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{I_1 \dots I_p}^{(P)} \cap \Omega) \times \mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{E}_{I_1 \dots I_p}^{(P)} \cap \Omega)$, ainsi que les mesures gaussiennes du l'espace $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{E}_{I_1 \dots I_p}^{(P)} \cap \Omega)$.

DEZVOLTAREA UNEI FUNCȚII OLOMORFE (H) DUPĂ PUTERILE CRESCĂTOARE ALE UNUI POLINOM DAT

DE

O. SLIMAC

Fie $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$, cu $\theta^3 = 1$ o variabilă hipercomplexă din R^3 , $f(\omega)$ o funcție olomorfă (H), într-un domeniu $D \subset R^3$ și

$$P(\omega) = \omega^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \omega^k + \gamma \quad (1)$$

un polinom de gradul n în variabila hipercomplexă ω , care presupunem că are rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\alpha_i \in D$. Admitem că α_i ($i=1, 2, \dots, n$) nu sînt toate zerouri pentru funcția olomorfă (H) $f(\omega)$.

Să arătăm în cele ce urmează că $f(\omega)$ se poate dezvolta în interiorul lui D într-o serie după puterile crescătoare ale polinomului $P(\omega)$ (1).

În acest scop construim un polinom $Q(\omega)$ de gradul $n-1$ în ω , care în punctele $\alpha_i \in D$ ($i=1, 2, \dots, n$) să ia valorile $f(\alpha_i)$. Dacă scriem explicit acest polinom

$$Q(\omega) = \varphi_{0,0} + \omega \varphi_{0,1} + \omega^2 \varphi_{0,2} + \dots + \omega^{n-1} \varphi_{0,n-1} \quad (2)$$

unde $\varphi_{0,0}, \varphi_{0,1}, \dots, \varphi_{0,n-1}$ sînt coeficienții săi, putem determina valorile acestor coeficienți din sistemul de condiții:

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0} + \alpha_1 \varphi_{0,1} + \alpha_1^2 \varphi_{0,2} + \dots + \alpha_1^{n-1} \varphi_{0,n-1} &= f(\alpha_1) \\ \vdots \\ \varphi_{0,0} + \alpha_n \varphi_{0,1} + \alpha_n^2 \varphi_{0,2} + \dots + \alpha_n^{n-1} \varphi_{0,n-1} &= f(\alpha_n) \end{aligned} \quad (3)$$

Considerăm acest sistem liniar ca fiind de tip Cramer, ceea ce atrage după sine că polinomul (1) are numai rădăcini simple.

Formăm funcția

$$q(\omega) = f(\omega) - Q(\omega) \quad (4)$$

Funcția (4) admite ca zerouri pe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Deci o putem scrie sub forma :

$$g(\omega) = f(\omega) - Q(\omega) = \prod_{i=1}^n (\omega - \alpha_i) f_1(\omega) = P(\omega) f_1(\omega) \quad (5)$$

Din (4) și (5) se obține :

$$f(\omega) = Q(\omega) + P(\omega)f_1(\omega) \quad (6)$$

Dacă aplicăm acum prin recurență acest raționament, care este o extensiune a procedurii lui Euclid de la găsirea celui mai mare divizor comun a două polinoame, obținem sirul de relații :

$$f_1(\omega) = \frac{1}{2} f_2(\omega) P(\omega) + Q_1(\omega)$$

$$f_2(\omega) = \frac{1}{3} f_3(\omega) P(\omega) + Q_2(\omega)$$

$$\dots\dots\dots f_p(\omega) = \frac{1}{p+1} f_{p+1}(\omega) P(\omega) + Q_p(\omega)$$

Dacă înlocuim (7) în (6) unde $Q_1(\omega)$, $Q_2(\omega)$, ..., $Q_p(\omega)$ sînt polinoame de gradul $n-1$ în ω cu coeficienții

$$\varphi_{1,0}; \varphi_{1,1}; \dots; \varphi_{1,n-1}, \text{ pentru } Q_1(\omega)$$

$$\varphi_{2,0}; \varphi_{2,1}; \dots; \varphi_{2,n-1} \text{ pentru } Q_2(\omega)$$

$$\dots\dots\dots \varphi_{p,0}; \varphi_{p,1}; \dots; \varphi_{p,n-1}, \text{ pentru } Q_p(\omega)$$

obținem următoarea dezvoltare a funcției $f(\omega)$

$$f(\omega) \sim \sum_{p=0}^{\infty} (\varphi_{p,0} + \omega \varphi_{p,1} + \dots + \omega^{n-1} \varphi_{p,n-1}) \frac{P^p(\omega)}{p!}. \quad (9)$$

Seria din (9) este absolut și uniform convergentă într-un domeniu $D_1 \subset D$ și pentru a putea scrie să funcția olomorfă (H) $f(\omega)$ este egală cu seria dată de (9) trebuie să determinăm toți coeficienții $\varphi_{p,s}$ în funcție de coeficienții polinomului dat $P(\omega)$ (1) și de funcția olomorfă $f(\omega)$.

Pentru aceasta considerăm (9) ca egalitate între $f(\omega)$ și seria scrisă după puterile crescătoare ale polinomului (1) și o derivăm parțial în raport cu γ (coeficient în (1)). Avem :

$$\begin{aligned} 0 = & \varphi_{1,0} + \frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial \gamma} + \omega \left(\varphi_{1,1} + \frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial \gamma} \right) + \omega^2 \left(\varphi_{1,2} + \frac{\partial \varphi_{0,2}}{\partial \gamma} \right) + \dots + \omega^{n-1} \left(\varphi_{1,n-1} + \frac{\partial \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma} \right) + \\ & + \dots + \frac{1}{p!} \left[\left(\varphi_{p+1,0} + \frac{\partial \varphi_{p,0}}{\partial \gamma} \right) + \omega \left(\varphi_{p+1,1} + \frac{\partial \varphi_{p,1}}{\partial \gamma} \right) + \dots + \omega^{n-1} \left(\varphi_{p+1,n-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \varphi_{p,n-1}}{\partial \gamma} \right) \right] P_{(\omega)}^p + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Această ultimă egalitate este o identitate în ω . De aici rezultă relațiile, care prin recurență, determină toți coeficienții $\varphi_{p,s}$, ($p=1, 2, 3, \dots$), ($s=0, 1, 2, \dots, n-1$) alături de cei determinați prin sistemul (3). Obținem :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0} = & -\frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial \gamma}; \quad \varphi_{1,1} = -\frac{\partial \varphi_{0,1}}{\partial \gamma}; \quad \dots; \quad \varphi_{1,n-1} = -\frac{\partial \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma} \\ \varphi_{2,0} = & -\frac{\partial \varphi_{1,0}}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \varphi_{0,0}}{\partial \gamma^2}; \quad \dots; \quad \varphi_{2,n-1} = -\frac{\partial \varphi_{1,n-1}}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dots\dots\dots \varphi_{p,p} = (-1)^p \frac{\partial^p \varphi_{0,0}}{\partial \gamma^p}; \quad \dots; \quad \varphi_{p,s} = (-1)^p \frac{\partial^p \varphi_{0,s}}{\partial \gamma^p}; \quad \dots; \quad \varphi_{p,n-1} = (-1)^p \frac{\partial^p \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma^p}.$$

În concluzie avem următorul rezultat: o funcție $f(\omega)$ olomorfă (H) într-un domeniu $D \subset R^3$ se poate dezvolta după o serie uniform și absolut convergentă într-un domeniu $D_1 \subset D$ după puterile crescătoare ale polinomului

$$P(\omega) = \omega^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \omega^k + \gamma$$

polinomul care are toate zerourile simple în D_1 , după formula

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left[\frac{\partial^p \varphi_{0,0}}{\partial \gamma^p} + \frac{\partial^p \varphi_{0,1}}{\partial \gamma^p} \omega + \dots + \frac{\partial^p \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma^p} \omega^{n-1} \right] P^p(\omega) \quad (12)$$

coeficienții $\varphi_{0,0}; \varphi_{0,1}; \dots; \varphi_{0,n-1}$ fiind dați de sistemul (3). Aplicație: Fie funcția olomorfa (H) $f(\omega) = \frac{1}{u-\omega}$, pe care s-o dezvoltăm în serie după puterile crescătoare ale polinomului

$$P(\omega) = (\omega - a)(\omega - b) = \omega^2 - k\omega + \gamma$$

Avem

$$\frac{1}{u-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \omega + \beta_n) [\omega^2 - k\omega + \gamma]^n \quad (13)$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{u^2 - ku + \gamma}; \quad \beta = \frac{u-k}{u^2 - ku + \gamma}; \quad \alpha_n = \frac{1}{(u^2 - ku + \gamma)^{n+1}}; \quad \beta_n = \frac{u-k}{(u^2 - ku + \gamma)^{n+1}}.$$

Pentru a găsi domeniul de convergență facem diferența

$$\frac{1}{u-\omega} - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \omega + \beta_n) [(\omega - \alpha)(\omega - \beta)]^n = \left[\frac{(\omega - \alpha)(\omega - \beta)}{(u - a)(u - b)} \right]^{n+1} \cdot \frac{1}{u - \omega}.$$

Găsim că restul dezvoltării (13) depinde de

$$\left(\frac{|\omega - a| \cdot |\omega - b|}{|u - a| \cdot |u - b|} \right)^{n+1}$$

și cum dezvoltarea

$$\frac{1}{u-\omega} = \frac{1}{u} + \frac{\omega}{u^2} + \frac{\omega^2}{u^3} + \dots$$

este valabilă când $|\omega| < |u|$ înseamnă că restul dezvoltării (13) $(|\omega^2 - k\omega + \gamma| / |u^2 - ku + \gamma|)^{n+1} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, deci (13) este convergentă când ω aparține interiorului suprafeței

$$|(u - a)(u - b)| = \rho_2 \text{ (const.) adică } \rho_1 < \rho_2$$

Deci domeniul de convergență al seriei (13) este închis de suprafața $|\omega^2 - k\omega + \gamma| = \rho_1 \text{ (const.)}$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Marcel N. Roșculeț: O teorie a funcțiilor de o variabilă hipercomplexă în spațiul cu trei dimensiuni. (Teză de doctorat, Buc. 1949) Șt. Cerc. Mat. Ac. R.P.R., Tom. V nr. 3-4, 1954, p. 361-401.

ENTWICKLUNG EINER (H) - HOLOMORPHEN FUNKTION NACH DEN STEIGENDEN POTENZEN EINES GEGEBENEN POLYNOMS

ZUSAMMENFASSUNG

Man betrachte eine (H) - holomorphe Funktion $f(\omega)$ (siehe [1]) mit $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$, $\theta^3 = 1$ und zeigt dass diese Funktion in $D \subset \mathbb{R}^3$ eine Entwicklung nach steigenden Potenzen des Polynoms $P(\omega) = \omega^n$ zulässt, die folgende ist:

$$f(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left[\frac{\partial^p \varphi_{0,0}}{\partial \gamma^p} + \frac{\partial^p \varphi_{0,1}}{\partial \gamma^p} \omega + \dots + \frac{\partial^p \varphi_{0,n-1}}{\partial \gamma^p} \omega^{n-1} \right] P^{(p)}(\omega).$$

Es wird auch ein Beispiel für die Funktion $f(\omega) = \frac{1}{u-\omega}$ gegeben, welche nach den Potenzen des Polynoms

$$P(\omega) = (\omega - a)(\omega - b)$$

entwickelt wird.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE
POUR UNE FONCTION VECTORIELLE

PAR

O. SLIMAC

Soit

$$\vec{a}(\vec{u}, \vec{v}) = i\lambda(\vec{u}, \vec{v}) + j\mu(\vec{u}, \vec{v}) + k\nu(\vec{u}, \vec{v})$$

une fonction vectorielle définie dans un ensemble $\mathfrak{M}$ de vecteurs de l'espace R^3 , où $\vec{u}, \vec{v} \in \mathfrak{M} \subset R^3$ sont des variables. Au moyen des fonctions $\lambda(\vec{u}, \vec{v})$, $\mu(\vec{u}, \vec{v})$, $\nu(\vec{u}, \vec{v})$, qui sont les composantes du vecteur $\vec{a}(\vec{u}, \vec{v})$ formons la suivante fonction

$$F(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \lambda(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\lambda(\vec{u}_3, \vec{u}_4) + \mu(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\mu(\vec{u}_3, \vec{u}_4) + \nu(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\nu(\vec{u}_3, \vec{u}_4). \quad (1)$$

On définit l'équation fonctionnelle cyclique vectorielle, formée avec les fonctions composantes λ , μ , ν où $\vec{u}_i \in \mathfrak{M}$ ($i=1, 2, 3, 4$) sont des variables arbitraires dans $\mathfrak{M}$, a la forme

$$F(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) + F(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_2) + F(\vec{u}_1, \vec{u}_4, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0 \quad (2)$$

Pour solutionner cette équation fonctionnelle on introduit par (1) les fonctions composantes λ , μ , ν :

$$L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}$$

$$M(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \mu_{12}\mu_{34} + \mu_{13}\mu_{42} + \mu_{14}\mu_{23} \quad (3)$$

$$N(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = \nu_{12}\nu_{34} + \nu_{13}\nu_{42} + \nu_{14}\nu_{23}$$

L'équation fonctionnelle (2) devient

$$L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) + M(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) + N(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = 0 \quad (4)$$

Si l'on fait $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_3 = \vec{u}_4 = \vec{u}$ résulte

$$3\lambda^2(\vec{u}, \vec{u}) + 3\mu^2(\vec{u}, \vec{u}) + 3\nu^2(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad (5)$$

Donc

$$\lambda(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0; \mu(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0; \nu(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0 \quad (6)$$

Si l'on fait plus loin $\bar{u}_1=\bar{u}_2=\bar{u}$ et $\bar{u}_3=\bar{u}_4=\bar{v}$ résulte

$$\lambda(\bar{u}, \bar{v}) [\lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{u})] + \mu(\bar{u}, \bar{v}) [\mu(\bar{u}, \bar{v}) + \mu(\bar{v}, \bar{u})] + \nu(\bar{u}, \bar{v}) [\nu(\bar{u}, \bar{v}) + \nu(\bar{v}, \bar{u})] = 0 \quad (7)$$

Maintenant en (7) on fait l'échange $\bar{u} \rightleftharpoons \bar{v}$, ce qui donne

$$\lambda(\bar{v}, \bar{u}) [\lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{u})] + \mu(\bar{v}, \bar{u}) [\mu(\bar{u}, \bar{v}) + \mu(\bar{v}, \bar{u})] + \nu(\bar{v}, \bar{u}) [\nu(\bar{u}, \bar{v}) + \nu(\bar{v}, \bar{u})] = 0. \quad (7')$$

Par l'addition des relations (7) et (7') on a

$$[\lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{u})]^2 + [\mu(\bar{u}, \bar{v}) + \mu(\bar{v}, \bar{u})]^2 + [\nu(\bar{u}, \bar{v}) + \nu(\bar{v}, \bar{u})]^2 = 0. \quad (8)$$

D'ici résulte que les fonctions composantes λ, μ, ν sont impaires par rapport aux variables, donc :

$$\begin{cases} \lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{u}) = 0 \\ \mu(\bar{u}, \bar{v}) + \mu(\bar{v}, \bar{u}) = 0 \\ \nu(\bar{u}, \bar{v}) + \nu(\bar{v}, \bar{u}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Pour donner une solution achevée de l'équation fonctionnelle cyclique (4) on doit mettre quelques hypothèses sur l'indépendance ou la dépendance des fonctions λ, μ, ν . Si l'on suppose que les fonctions λ, μ, ν n'ont aucune liaison entre eux résulte alors que dans (4) les fonctions L, M, N , s'annulent chacune séparément et donc la solution générale pour chaque composante s'obtient, après D. S. Mitrinović et S. B. Presić [1]:

$$\begin{cases} \lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha(\bar{u}) \beta(\bar{v}) - \alpha(\bar{v}) \beta(\bar{u}) \\ \mu(\bar{u}, \bar{v}) = \gamma(\bar{u}) \delta(\bar{v}) - \gamma(\bar{v}) \delta(\bar{u}) \\ \nu(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(\bar{u}) \psi(\bar{v}) - \varphi(\bar{v}) \psi(\bar{u}) \end{cases} \quad (10)$$

où les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ et ψ sont arbitraires et la fonction vectorielle $\bar{a}(\bar{u}, \bar{v})$ a la forme générale

$$\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{i} \begin{vmatrix} \alpha(\bar{u}) & \beta(\bar{u}) \\ \alpha(\bar{v}) & \beta(\bar{v}) \end{vmatrix} + \bar{j} \begin{vmatrix} \gamma(\bar{u}) & \gamma(\bar{v}) \\ \delta(\bar{u}) & \delta(\bar{v}) \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} \varphi(\bar{u}) & \varphi(\bar{v}) \\ \psi(\bar{u}) & \psi(\bar{v}) \end{vmatrix}$$

Si l'on suppose que les fonctions L, M, N , données par (3) ne s'annulent pas chacune séparément, il est possible que l'équation (4) peut avoir aussi des autres solutions. Cette problème reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović et S.B. Presić, Publik. Univ. Beograd Nr. 60, 1962.

DESPRE REPREZENTAREA GRUPULUI $GL(n, R)$ ÎN GRUPUL

$$\text{AUT}(R_n^{C^P}) \cong GL(C_n^P, R)$$

DE

D. RENDI, B. RENDI

Fie V un spațiu liniar real n -dimensional. Se știe [2] că prin forma canonică a unei p -forme se înțelege orbita formei prin acțiunea grupului $GL(n, R)$ pe spațiul C_n^P -dimensional al p -formelor $\Omega^P(v)$. Această acțiune a lui $GL(n, R)$ pe $\Omega^P(v)$ este dată prin reprezentarea

$$T \in GL(n, R) \xrightarrow{\mathfrak{A}} T_n^P = \|A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}\| \in GL(C_n^P, R)$$

unde

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = \begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_1}^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p}^{j_1} & \dots & a_{i_p}^{j_p} \end{vmatrix}.$$

În continuare identificăm V cu R^n și $\Omega^P(v)$ cu $R^{C_n^P}$. Pornind de la elementul $(1, 0, \dots, 0) \in R^{C_n^P}$ putem obține elementele $(x_1, x_2, \dots, x_{C_n^P})$ cu $x_1 \neq 0$, folosind numai transformări ce au matricea de forma:

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ x_2 & 1 & 0 \dots 0 \\ x_3 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{C_n^P} & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Mulțimea acestor matrici este un subgrup al grupului $GL(C_n^P, R)$. Pornim cu aceste considerente deoarece orice p -formă $\omega \in \Omega^P(v)$ printr-o transformare convenabil aleasă din $GL(n, R)$ se poate aduce la forma

$$\omega = 1 \cdot \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \dots \wedge \epsilon^P + \dots$$

adică privit ca element din $R^{C_n^P}$ are prima coordonată 1. Orice orbită este bine determinată de un reprezentant care deci poate să fie ales ca prima coordonată a sa să fie 1.

Pe noi ne interesează posibilitatea alegerii unei forme de pe fiecare orbită. Se știe [1] că în dimensiuni mici ($n < 8$) pentru p -forme avem un număr finit de orbite deci alegerea este simplă.

Dorim să găsim un procedeu de determinare a dimensiunii orbitelor. Pentru aceasta alegem transformări de forma (1) și determinăm condițiile în care aceste transformări sînt imagini din $GL(n, \mathbb{R})$ prin reprezentarea considerată, $\mathfrak{R}$. Putem determina și elementele lui $GL(n, \mathbb{R})$ care au ca imagine transformări cu matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1^2 & \dots & a_1^{C_n^P} \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_2^{C_n^P} \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{C_n^P}^2 & \dots & a_{C_n^P}^{C_n^P} \end{pmatrix}$$

adică transformări ce invariază elementul $\omega_0 = 1, 0, \dots, 0$.

Considerăm cazul particular $n=8$ și $p=3$. Se constată imediat că $\omega_0 = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$ este invariabil de transformări de forma

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \\ B & C & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(8, 8)$$

unde

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 1.$$

Adică ω_0 este invariabilă la transformările dintr-un subgrup de dimensiune 8. Astfel din ω_0 obținem elemente diferite de ω_0 prin transformări de forma

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 & a_1^7 & a_1^8 \\ 0 & 1 & 0 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 & a_2^7 & a_2^8 \\ 0 & 0 & 1 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 & a_3^7 & a_3^8 \\ \hline & & O & & U & & & \end{pmatrix}.$$

Imaginea lui T prin $\mathfrak{R}$ are matrice de forma (1).

Dintre elementele primei coloane $A_{123}^{i_1 i_2 i_3}$ independente sînt doar următoarele :

$$\begin{aligned} A_{123}^{123} &= 1; & A_{123}^{124} &= -a_{34}; & A_{123}^{125} &= a_{35}; & A_{123}^{126} &= -a_{36} \\ A_{123}^{127} &= a_{37}; & A_{123}^{128} &= -a_{38}; & A_{123}^{134} &= a_{24}; & A_{123}^{135} &= -a_{25} \\ A_{123}^{136} &= a_{26}; & A_{123}^{137} &= -a_{27}; & A_{123}^{138} &= a_{28}; & A_{123}^{234} &= -a_{14} \\ A_{123}^{235} &= a_{15}; & A_{123}^{236} &= -a_{16}; & A_{123}^{237} &= a_{17}; & A_{123}^{238} &= -a_{18}. \end{aligned}$$

Se deduce de aici că orbita lui ω_0 are dimensiunea $15+1$. Dacă se alege transformarea cu matricea

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{56} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL(C_8^3; R)$$

cu elementele $a_1=1, a_2=0, a_3=0, a_4=0, a_5=0, a_6=0, a_7=0, a_8=0, a_9=0, a_{10}=0, a_{11}=0, a_{22}=0, a_{23}=0, a_{24}=0, a_{25}=0, a_{26}=0$, restul fiind arbitrar, se observă că singurul element din $GL(8, R)$ ce admite imagine de această formă este unitatea $u \in GL(8, R)$. Acționând asupra lui ω_0 prin astfel de transformări obținem elemente ce nu se găsesc pe orbita lui ω_0 .

Astfel se obține o subvarietate 40 dimensională în spațiul 3-formelor pe R^8 care nu are în comun cu orbita lui $\omega_0 = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$ decât pe ω_0 .

Pentru a determina traiectoria lui ω_0 trebuie să considerăm elemente de forma (1) unde cele 16 elemente enumerate mai sus sînt arbitrare iar restul de 40 se obțin din ele conform relațiilor de dependență dintre minorii $A_1^{i_1 i_2 i_3}$ ce se stabilesc cu ușurință.

Cu aceasta s-a stabilit următorul rezultat, privind reprezentarea $\mathfrak{A}$:

Teoremă: Dacă $T \in GL(x, R)$ este variabil, deci depinde de n^2 parametri independenți, atunci $T_n^P \in GL(C_n^P, R)$ are pe fiecare linie (coloană) $p(n-p)+1$ elemente independente.

Observație. Dacă considerăm două linii (sau coloane) ale lui T_n^P , pe cele două linii vom avea $2p(n-p)+2$ elemente independente numai în cazul în care cele două linii provin din două grupuri disjuncte de p -coloane ale lui T .

BIBLIOGRAFIE

- [1] I. Martinet, Sur la singularités des formes différentielles, Annales de l'Institut Fourier T, XX Fasc. 1, 1970.
- [2] B. Rendi, Sur la forme canonique des formes extérieures, Periodica Mathematica Hungarica, vol. 0 (3), 1977.

REZUMAT

În lucrarea de față se stabilesc unele proprietăți ale reprezentării grupului $GL(n, R)$ în grupul $\text{Aut}(R^{C_n^P})$, proprietăți ce se folosesc la studiul formelor canonice ale p -formelor.

SUR LA REPRESENTATION DU GROUPE $GL(n, R)$ DANS LE GROUPE

$$\text{Aut}(R^{C_n^P}) \cong GL(C_n^P, R)$$

RESUMÉ

Dans cette note on étudie les propriétés de la représentation $GL(n, R) \rightarrow GL(C_n^P, R)$ propriétés utilisées dans la forme canonique des p -formes différentielles.

DESPRE STRUCTURA DE LATICE A ALGEBRELOR UNIVERSALE CU OPERAȚII INFINITARE

DE

B. RENDI

Fie (A, Ω) o algebră cu domeniul de operații Ω . Prin $a : \Omega \rightarrow O_{ra}$ atașăm la orice operație $\omega \in \Omega$ aritatea sa, adică numărul ordinal ρ pentru care ω este definit pe A^ρ . Pentru cazul cind $a(\Omega) \subset N$ în laticea congruențelor $\mathcal{C}(A)$ avem algoritmi pentru construirea supremului. Congruența $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$ pentru $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}(A)$ este tocmai relația de echivalență $\theta_1 \vee \theta_2$ (operația $\vee$ fiind efectuată în laticea $\mathcal{S}(A)$, a echivalențelor pe A) cu alte cuvinte $\mathcal{C}(A)$ este sublatice în $\mathcal{S}(A)$. Se știe că $x\theta y$ are loc dacă și numai dacă există un șir $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$ astfel încît $x = x_0, x_{i-1} \theta_1 x_i$ sau $x_{i-2} \theta_2 x_i$, și $x_n = y$.

De altfel putem construi șirul de relații $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ în felul următor :

Pentru $x, y \in A$ are loc $x\tau_n y$ dacă și numai dacă există un șir de lungime n , $x_0, x_1, \dots, x_n \in A$, $x_0 = x$, $y = x_n$ și $x_{i-1} \theta_1 x_i$ sau $x_{i-1} \theta_2 x_i$.

Se observă că τ_n nu sînt relații de echivalență dar $\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau_n$ este relație de echivalență, este chiar relația $\theta_1 \vee \theta_2$ adică congruența $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$.

În cazul algebrelor universale cu operații infinitare adică $a(\Omega) \not\subset N$ pentru două congruențe $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}(A)$ relația de echivalență $\gamma = \theta_1 \vee \theta_2$ nu se știe dacă este sau nu congruență.

Procedeul se poate generaliza luînd în considerare anumite congruențe particulare.

Definiție : Echivalența $\theta \in \mathcal{S}(A)$ se numește congruență de tip finit dacă pentru orice operație $\omega \in \Omega$ și orice $(x_0, x_1, \dots, x_\xi, \dots)_{\xi < \rho}$, $(y_0, y_1, \dots, y_\xi, \dots)_{\xi < \rho}$, $\rho = a(\omega)$ din faptul că $x_i \theta y_i$, $\forall i < \rho$ și

$$\text{card} \{i \mid i \in O_{ra}, x_i \neq y_i\} \in N$$

rezultă $(x_0 \dots x_\xi, \dots) \omega (y_0 \dots y_\xi, \dots)$.

Se notează cu $\mathcal{C}_F(A)$ mulțimea congruențelor de tip finit pe algebra A . Se observă că dacă $a(\Omega) \subset N$ atunci $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}_F(A)$.

Teoremă : Dacă $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}_F(A)$ atunci relația de echivalență $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$ este de asemenea o congruență de tip finit adică $\theta \in \mathcal{C}_F(A)$. Astfel $\mathcal{C}_F(A)$ este sublatice a lui $\mathcal{S}(A)$.

Demonstrație. Fie $\omega \in \Omega$ cu $a(\omega) = \rho \in O_{ra}$ și fie $x = (x_0, x_1, \dots, x_\xi, \dots)_{\xi < \rho}$; $y = (y_0, y_1, \dots, y_\xi, \dots)_{\xi < \rho}$ astfel încît $x_i \neq y_i$ pentru un număr finit de $i \in O_{ra}$, $i < \rho$.

Fie $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ mulțimea ordinaletor pentru care $x_i \neq y_i$.

Avem $x_i \theta y_i$

Formăm

$$x_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{i_1}^0, \dots, x_{i_2}, \dots)_{\xi < \rho}$$

$$x_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{i_1}^1, \dots, x_{i_2}, \dots)_{\xi < \rho}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n_1} = (x_0, x_1, \dots, x_{i_1}^{n_1}, \dots, x_{i_2}, \dots)_{\xi < \rho}$$

unde

$$x_{i_1}^{l-1} \theta_1 x_{i_1}^l \text{ sau } x_{i_1}^{l-1} \theta_2 x_{i_1}^l$$

iar

$$x_{i_1}^0 = x_{i_1} \text{ și } x_{i_1}^{n_1} = y_{i_1}.$$

Se deduce imediat din faptul că $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}_F$, că $\omega(x_0) \theta \omega(x_1), \omega(x_1) \theta \omega(x_2), \dots, \omega(x_{n_1-1}) \theta \omega(x_{n_1})$ au loc, adică $\omega(x_0) \theta \omega(x_{n_1})$ are loc.

În continuare luăm

$$x_{n_1} = (x_0, \dots, x_{i_1}^{n_1}, \dots, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_3}, \dots)$$

$$x_{n_1+1} = (x_0, \dots, x_{i_1}^{n_1}, \dots, x_{i_2}^1, \dots, x_{i_3}, \dots)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n_1+n_2} = (x_0, \dots, x_{i_1}^{n_1}, \dots, x_{i_2}^{n_2}, \dots, x_{i_3}, \dots)$$

unde

$$x_{i_2}^0 = x_{i_2}, \quad x_{i_2}^{n_2} = y_{i_2}, \quad \text{și} \quad x_{i_2}^{l-1} \theta_1 x_{i_2}^l \text{ sau } x_{i_2}^{l-1} \theta x_{i_2}^l$$

Rezultă imediat $\omega(x_{n_1}) \theta \omega(x_{n_1+n_2})$.

Continuînd procedeul, după k pași ajungem $\omega(x_0) \theta \omega(x_{n_1}), \omega(x_{n_1}) \theta \omega(x_{n_1+n_2}), \dots, \omega(x_{n_1+n_2} + \dots + n_{k-1}) \theta \omega(x_{n_1} + \dots + n_k)$

Cum $x_0 = x$ și $x_{n_1+n_2} + \dots + n_k = y$ rezultă $\omega(x) \theta \omega(y)$ adică $\theta \in \mathcal{C}_F(A)$.

Cu aceasta teorema s-a demonstrat.

Demonstrația nu se poate transpune pentru congruențele oarecare ale algebrei date.

BIBLIOGRAFIE

- [1] G. Grätzer, Universal Algebra Manitoba, University — 1970.
- [2] P. Cohn, Universal Algebra, New-York Evanston, London, 1965.
- [3] A. G. Kuroș, Lecții de algebră generală. Moscova 1962 (l. rusă).

REZUMAT

În lucrarea de față se introduce noțiunea de congruență de tip finit și se arată că mulțimea lor formează o sublatice a lăței echivalențelor mulțimii de bază și de asemenea o sublatice a lăței congruențelor.

SUR LA STRUCTURE DE LATICE DE L'ALGEBRES UNIVERSALLES AVEC OPERATIONS INFINITAIRES

RESUMÉ

Dans cette note on introduit la notion de congruence de tipe finite et on montre que leurs ensembles forment une sublatice de la latice des equivalences pour l'ensemble de support, et un sublatice de la latice des congruences.

ASUPRA UNOR APLICAȚII ALE SPAȚIILOR FINSLER ÎN TEHNICĂ

DE

FRANCISC KLEPP

I. Un spațiu Finsler n dimensional F_n este o varietate diferențiabilă metrică, n dimensională, în care metrica este definită cu ajutorul tensorului fundamental:

$$g_{ij}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \quad (1)$$

unde funcția $F(x, y) = F(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n)$, numită funcție fundamentală, satisface condițiile de regularitate curent impuse [1]:

1. $F(x, ky) = kF(x, y)$, $k > 0$; 2. $F(x, y) \geq 0$, $y \neq 0$; 3. forma patratică $g_{ij}(x, y) \xi^i \xi^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \xi^i \xi^j$ este pozitiv definită. Pentru realizarea practică

a unui astfel de spațiu se consideră un domeniu D din spațiul real n dimensional X_n , acoperit cu un sistem de coordonate, prin care fiecare punct este reprezentat printr-un ansamblu de n variabile x^i . Mulțimea punctelor din D ale căror coordonate se pot exprima ca funcții de un singur parametru: $x^i = x^i(t)$, generează o curbă C în X_n . Dacă funcțiile x^i sînt cel puțin de clasa C^1 se poate considera entitatea de componente $\dot{x}^i$ ca vector tangent la curbă. Ansamblul $(x^i, \dot{x}^i)$ se numește element liniar și spațiul acestor elemente liniare este un spațiu Finsler. În acest spațiu lungimea a unui arc de curbă $x^i = x^i(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ este dată de integrala

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, \dot{x}) dt.$$

Cu ajutorul tensorului fundamental $g_{ij}(x, \dot{x})$ se pot construi prin analogie cu geometria riemanniană simbolurile lui Christoffel $\gamma_{ijk}(x, \dot{x})$ și tensorul de componente:

$$C_{ijk}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \quad (2)$$

numit tensor de torsiune al spațiului F_n . Folosindu-se γ_{ijk} și C_{ijk} se pot construi următoarele obiecte geometrice importante în geometria spațiilor Finsler:

$$P_{ij}^s(x, \dot{x}) = \gamma_{ij}^s - C_{ik}^s \gamma_{rj}^k \dot{x}^r; \quad \Gamma_{kij} = \Gamma_{kij} + C_{kih} \Gamma_{rj}^h \dot{x}^r$$

$$P_{ij}^{*s}(x, \dot{x}) = \Gamma_{ij}^{*s}(x, \dot{x}) = \gamma_{ij}^s - (C_{ij}^s P_{jq}^h + C_{jh}^s P_{iq}^h - g^{sr} C_{ijh} P_{rq}^h) \dot{x}^q$$

$$A_{ih}^k = F C_{ih}^k; \quad G^i = \frac{1}{2} \gamma_{hk}^i \dot{x}^h \dot{x}^k$$

unde Γ_{ij}^{*s} sînt coeficienții conexiunii afine și simetrice a lui E. Cartan [2], iar A_{jh}^i sînt componentele unui tensor simetric. Dacă se consideră vectorul unitar l^i al elementului de suport, dat de relația:

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{F(x, \dot{x})} \quad (3)$$

atunci :

$$l_i = g_{ik}(x, \dot{x}) l^i = \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}.$$

Cu ajutorul obiectelor geometrice definite mai sus se pot introduce următoarele derivate covariante :

1. Derivata covariantă a lui H. Rund [3] a tensorului $T_j^i(x, \xi)$ unde $\xi^i = \xi^i(x^k)$ este :

$$T_{j;k}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \frac{\partial T_j^i}{\partial \dot{x}^h} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^k} + T_j^h \Gamma_{hk}^{*i} - T_h^i \Gamma_{jk}^{*h}. \quad (4)$$

2. Derivatele covariante ale lui E. Cartan [2] pentru tensorul $T_j^i(x, \dot{x})$ sînt :

$$T_{j|k}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial T_j^i}{\partial \dot{x}^h} \Gamma_{rk}^{*h} \dot{x}^r + T_j^h \Gamma_{hk}^{*i} - T_h^i \Gamma_{jk}^{*h} \quad (5)$$

și :

$$T_j^i|_k = F \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + T_j^h A_{hk}^i - T_h^i A_{jk}^h. \quad (6)$$

Derivatele covariante (4) și (5) se reduc la derivata covariantă din geometria riemanniană, cînd tensorul metric fundamental este independent de $\dot{x}$, în timp ce derivata covariantă (6) nu are analog în geometria riemanniană.

Pentru derivatele covariante ale tensorului fundamental g_{ij} se obține :

$$g_{ij;k}(x, \xi) = 2 C_{ijh}(x, \xi) \xi^h; k \text{ iar dacă } \xi^i = \dot{x}^i \Rightarrow g_{ij;k}(x, \dot{x}) = 0.$$

$$g_{ij|k}(x, \dot{x}) = 0 \text{ și } g_{ij}|_k(x, \dot{x}) = 0$$

Aceste rezultate reprezintă generalizarea lemei lui Ricci din geometria riemanniană și ele ilustrează că conexiunea lui Cartan păstrează metrica, în timp ce conexiunea lui Rund nu se bucură de această proprietate.

În geometria Finsler se introduc tensorii de curbură prin analogie cu cazul riemannian, folosindu-se formulele de comutare pentru diferite tipuri de derivate covariante :

1. Tensorul de curbură al lui H. Rund [3] $\tilde{K}_{jkh}^i$ apare din formula de comutare :

$$X^i; hk - X^i; kh = \tilde{K}_{jkh}^i(x, \xi) X^j.$$

2. Tensorii de curbură ai lui E. Cartan apar din următoarele formule de comutare : Primul tensor de curbură

$$S_{jkh}^i = A_{mh}^i A_{jk}^m - A_{mk}^i A_{jh}^m$$

apare din formula :

$$X^i|_{hk} - X^i|_{kh} = S_{jkh}^i X^j + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} X^i|_h - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^h} X^i|_k.$$

Al doilea tensor de curbură P_{jkh}^i apare din formula de comutare

$$X^i|_{hik} - X^i|_{k|_h}$$

iar al treilea R_{jkh}^i din formula de comutare

$$X^i|_{hk} - X^i|_{kh}.$$

II. Întrucît în spațiile Finsler tensorul metric $g_{ij}(x, \dot{x})$ depinde atît de coordonatele x^i cît și de variabilele direcționale $\dot{x}^i$ ele pot fi considerate ca model mate-

matic pentru studiul acelor fenomene fizice și tehnice ale căror proprietăți depind nu numai de punct ci și de direcție. În acest context spațiile Finsler constituie baza geometrică a teoriei lui Yukawa [4] despre cîmpurile spinoriale nelocale. Prin analogie cu derivatele covariante ale lui Cartan (5) și (6) se pot defini derivatele covariante ale unui spinor prin relațiile [5]:

$$\psi|_k = \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi}{\partial x^h} \frac{\partial G^h}{\partial x^k} - \Gamma_k^* \psi; \quad \psi|_k = F \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - F C_k \psi \quad (7)$$

unde Γ_k^* și C_k sînt coeficienții de conexiune de spin.

De asemenea studiul proprietăților feromagnetice ale substanțelor se poate face cu ajutorul spațiilor Finsler. În orice punct al unei substanțe feromagnetice o magnetizare spontană este cauzată în mare parte de spinul atomilor. În mecanica cuantică spinul are un caracter de moment unghiular, iar în cazul feromagnetismului densitatea momentului magnetic pe un domeniu are o valoare constantă. Notînd componentele sale cu q^k , are loc relația de normare $a_{ij} q^i q^j = 1$, în care a_{ij} este un tensor de normare. Din proprietățile sale se vede, că q^i este un caz particular al vectorului l^i definit de relația (3).

În urma interacțiunii dintre magnetizare și deformare magnetostricția înzestrează materialul cu o metrică naturală, care depinde nu numai de coordonatele punctului curent x^i , ci și de mărimile $q^i = l^i$. În consecință magnetostricția poate fi studiată cu ajutorul spațiilor Finsler. Pe această cale se pot regăsi rezultatele cercetării lui Amari [6], care în cercetările sale folosește o metrică de forma:

$$g_{ij} = \delta_{ij} - 2 e_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} l^k l^l - \dots$$

unde $g_{ij}(x, l) = g_{ij}(x, -l)$ asigurîndu-se simetria magnetostricției.

Studiind deplasarea paralelă în substanța magnetizată se obține torsiunea spațiului corespunzător sub forma:

$$\Omega^i = A_{kh}^i [dx^k, D l^h].$$

În expresia condițiilor, de integrabilitate apar entitățile S_{ihk}^j , P_{ihk}^j și R_{ihk}^j , care sînt tensorii de curbura ai lui Cartan definiți mai sus. Cu ajutorul lor se pot trage concluzii privind proprietățile magnetice ale mediului.

BIBLIOGRAFIE

- [1] P. Finsler: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Birkhauser Basel 1961.
- [2] E. Cartan: Les Espaces de Finsler. Exposé de Géométrie. Hermann. Paris. 1934.
- [3] H. Rund: The Differential Geometry of Finsler Spaces. Springer Verlag Berlin — Göttingen — Heidelberg 1959.
- [4] H. Yukawa: Phys. Rev. 91. (1953), 415—419.
- [5] Y. Takanô: Progr. of Theor. Phys. 40. (1968), 1 159.
- [6] S. Amari: RAAG Memoirs. 3. (1963), 193—214.

ON SOME APPLICATIONS OF FINSLER SPACES

SUMMARY

In this work are studied some characteristic properties of Finsler spaces which are used in modeling problems. The Author presents applications to the nonlocal spinorial fields and ferromagnetic properties.

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON-LINÉAIRE

PAR

AVRAM FILIPESCU

Hommage au Professeur D.S. Mitrinović
à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.

Dans cet article nous considérons un système d'équations fonctionnelles non-linéaires, lequel représente une généralisation du problème étudié par D.S. Mitrinović et P.M. Vasić, dans l'article „Sur une équation fonctionnelle non-linéaire” [1].

Soit, un système d'équations fonctionnelles avec deux équations et deux fonctions réelles inconnues, $a, b : R \times R \rightarrow R$, où les fonctions a, b sont seulement continues et λ, k sont constantes réelles arbitraires. Le domain aux valeurs des fonctions a, b à la structure algébrique de corps, par rapport des opérations addition (+) et multiplication ($\cdot$).

La forme du système est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} a(x, x) a(y, y) + kb(x, x) b(y, y) &= a^2(x, y) + kb^2(x, y) \\ a(x, x) b(y, y) + a(y, y) b(x, x) + \lambda b(x, x) b(y, y) &= 2a(x, y) b(x, y) + \lambda b^2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Posant

$$c = a + \frac{\lambda}{2} b : R \times R \rightarrow R ; \lambda \in R, \quad (2)$$

alors le système (1) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} c(x, x) c(y, y) + \frac{1}{4} (\lambda^2 + 4k) b(x, x) b(y, y) &= c^2(x, y) + \frac{1}{4} (\lambda^2 + 4k) b^2(x, y) \\ b(x, x) c(y, y) + b(y, y) c(x, x) &= 2b(x, y) c(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

I. Dans l'hypothèse $\lambda^2 + 4k = p^2 > 0$, en substituant

$$G = c + \frac{p}{2} b : R \times R \rightarrow R ; H = c - \frac{p}{2} b : R \times R \rightarrow R, p \in R \quad (4)$$

dans (3), nous obtenons :

$$G^2(x, y) = G(x, x) G(y, y) ; H^2(x, y) = H(x, x) H(y, y) \quad (5)$$

La solution générale de système (5) est (voir [1]) :

$$G(x, y) = \alpha(x, y) g(x) g(y) ; H(x, y) = \varepsilon(x, y) h(x) h(y) \text{ où } g, h : R \rightarrow R \quad (6)$$

sont des fonctions arbitraires et $\alpha, \varepsilon : R^2 \rightarrow \{-1, 1\}$ sont autres fonctions arbitraires, telle que pour tout x , $\alpha(x, x) = -1$, $\varepsilon(x, x) = -1$, où bien pour tout x , $\alpha(x, x) = 1$, $\varepsilon(x, x) = 1$.

La solution générale de système (1) est :

$$\left. \begin{aligned} a(x, y) &= \frac{p-\lambda}{2p} \cdot \alpha(x, y) g(x) g(y) + \frac{p+\lambda}{2p} \cdot \varepsilon(x, y) h(x) h(y) \\ b(x, y) &= \frac{1}{p} [\alpha(x, y) g(x) g(y) - \varepsilon(x, y) h(x) h(y)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

II. Dans l'hypothèse $\lambda^2 + 4k = 0$, le système (3) devient

$$c(x, x) c(y, y) = c^2(x, y); b(x, x) c(y, y) + b(y, y) c(x, x) = 2b(x, y) c(x, y) \quad (8)$$

Si nous posons $b(x, y) = \varphi(x, y) c(x, y)$ on obtient :

$$c(x, x) c(y, y) = c^2(x, y); \varphi(x, x) + \varphi(y, y) = 2\varphi(x, y) \quad (9)$$

Notons $\varphi(x, x) = 2F(x)$, $\varphi(y, y) = 2F(y)$, nous avons $\varphi(x, y) = F(x) + F(y)$ où $F: R \rightarrow R$ est une fonction arbitraire. Par conséquent, nous pouvons formuler le résultat suivant :

La solution générale de système (8) est

$$c(x, y) = \gamma(x, y) s(x) s(y); b(x, y) = \gamma(x, y) s(x) s(y) [F(x) + F(y)] \quad (10)$$

où $s: R \rightarrow R$ une fonction arbitraire et $\gamma: R^2 \rightarrow \{-1, 1\}$ est une autre fonction arbitraire telle que pour tout x , $\gamma(x, x) = -1$, où bien pour tout x , $\gamma(x, x) = 1$, alors que $F: R \rightarrow R$ est une fonction quelconque arbitraire.

III. Dans l'hypothèse $\lambda^2 + 4k = -p^2 < 0$, substituant les fonctions complexes conjuguées d'une variable réelle :

$$E = c + i \frac{p}{2} \cdot b: R \times R \rightarrow C; F = c - i \frac{p}{2} \cdot b: R \times R \rightarrow C, p \in R \quad (11)$$

alors le système (3) on écrit :

$$E(x, x) E(y, y) = E^2(x, y); F(x, x) F(y, y) = F^2(x, y). \quad (12)$$

La solution générale complexe continue de système (12) est :

$$\left. \begin{aligned} E(x, y) &= [m_1(x, y) + m_2(x, y) \cdot i] \cdot [e_1(x) + ie_2(x)] \cdot [e_1(y) + ie_2(y)] \\ F(x, y) &= [n_1(x, y) + n_2(x, y) \cdot i] \cdot [f_1(x) + if_2(x)] \cdot [f_1(y) + if_2(y)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

où $e_1, e_2, f_1, f_2: R \rightarrow R$ sont fonctions arbitraires et $m_1, m_2, n_1, n_2: R^2 \rightarrow \{-1, 1\}$, telle que pour tout x , $m_1 = -1$, $m_2 = -1$, $n_1 = -1$, $n_2 = -1$, où bien pour tout x , $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$. Notons $m_1(x, y) + im_2(x, y) = m(x, y)$; $e_1(x) + ie_2(x) = e(x)$; $n_1(x, y) + in_2(x, y) = n(x, y)$; $f_1(x) + if_2(x) = f(x)$ alors (13) on écrit :

$$E(x, y) = m(x, y) e(x) e(y); F(x, y) = n(x, y) f(x) f(y) \quad (14)$$

La solution générale de système (1) est :

$$\left. \begin{aligned} a(x, y) &= \frac{p + \lambda i}{2p} m(x, y) e(x) e(y) + \frac{p - \lambda i}{2p} n(x, y) f(x) f(y) \\ b(x, y) &= \frac{i}{p} [n(x, y) f(x) f(y) - m(x, y) e(x) e(y)] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Conclusion : La solution générale du système (1) dans les hypothèses $\lambda^2 + 4k = p^2 > 0$, $\lambda^2 + 4k = 0$, $\lambda^2 + 4k = -p^2 < 0$ est donnée par (7), (10), (15). La solution générale contient des fonctions arbitraires et des constantes arbitraires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. S. Mitrović et P. M. Vasić Sur une équation fonctionnelle non-linéaire. Publikacije Elektrot. fakult. Serija Matematika i Fizika. Nr. 412—460 (1973). Beograd. (pg. 3—10).
- [2] O. E. Gheorghiu Soluția generală măsurabilă a unui sistem de ecuații funcționale. Comunicările Acad. R.P.R. tom. II nr. 3—4. 1952 (pg. 199—203).

INTERPOLAREA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE CU AJUTORUL
CALCULATORULUI NUMERIC

DE
ȘT. MATEI

Interpolarea funcțiilor de o variabilă a fost utilizată de autor în [1] și [2].
Polinoamele de interpolare Lagrange se obțin cu formula :

$$P_n(x) = X L_n f \text{ în care : } X = \left\| 1 \frac{x}{h} \frac{x^2}{h^2} \dots \frac{x^i}{h^i} \dots \frac{x^n}{h^n} \right\| . \tag{1}$$

L_n este matricea Lagrange de interpolare de dimensiuni $(n+1) \cdot (n+1)$ și f este
matricea coloană $(n+1) \cdot 1$ obținută din tabelul de interpolare :

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & x_2 \dots x_i \dots x_n \\ \hline P_n(x) & f_0 & f_1 & f_2 \dots f_i \dots f_n \end{array} \tag{2}$$

Cu ajutorul calculatorului am obținut matricei Lagrange de interpolare regulată
de dimensiuni $1 \times 1 - 30 \times 30$.

În lucrarea de față am rulat la calculator pentru funcțiile de două variabile
matricei Lagrange tridimensionale $L_{1,1} - L_{11,11}$ iar pentru funcțiile de trei variabile
matricei cu patru dimensiuni $L_{1,1,1} - L_{5,5,5}$. Aceste matrice au fost descompuse în
matrice bidimensionale menținind succesiv cite un indice (respectiv cite doi indici)
constant. Schemele logice și programele rulate (care ocupă un volum mare) au fost
prezentate cu ocazia comunicării acestei lucrări. Pentru interpolarea funcțiilor de
două variabile $z = f(x, y)$ am folosit tabele cu două intrări de forma :

$\begin{array}{c} x \\ \diagdown \\ y \end{array}$	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y_0	z_{00}	z_{10}	z_{20}	$\dots$	z_{i0}	$\dots$	z_{n0}
y_1	z_{01}	z_{11}	z_{21}	$\dots$	z_{i1}	$\dots$	z_{n1}
y_2	z_{02}	z_{12}	z_{22}	$\dots$	z_{i2}	$\dots$	z_{n2}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_j	z_{0j}	z_{1j}	z_{2j}	$\dots$	z_{ij}	$\dots$	z_{nj}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_n	z_{0n}	z_{1n}	z_{2n}	$\dots$	z_{in}	$\dots$	z_{nn}

Pentru determinarea matricilor Lagrange de interpolare am folosit polinoamele Lagrange de interpolare a funcțiilor de două variabile :

$$L_{ij}^{(n,n)}(x, y) = \frac{\pi_{n+1}(x) \pi_{n+1}(y)}{(x-x_i)(y-y_j) \pi'_{n+1}(x_i) \pi'_{n+1}(y_j)}, \quad i, j = \overline{0, n} \quad (4)$$

din care se obține :

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n L_{ij}^{(n,n)}(x, y). \quad (5)$$

Comunicată la simpozionul „Matematica modernă aplicată la rezolvarea problemelor din industrie și economie“ Institutul Politehnic „Traian Vuia“ Timișoara 3 iunie 1978.

La interpolarea funcțiilor de trei variabile $u=f(x, y, z)$ am folosit tabele cu trei intrări și polinoamele Lagrange de interpolarea corespunzătoare scrise sub forma :

$$L_{ijk}^{(n,n,n)}(x, y, z) = \frac{\pi_{n+1}(x) \pi_{n+1}(y) \pi_{n+1}(z)}{(x-x_i)(y-y_j)(z-z_k) \pi'_{n+1}(x_i) \pi'_{n+1}(y_j) \pi'_{n+1}(z_k)} \quad (6)$$

din care se obține :

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n L_{ijk}^{(n,n,n)}(x, y, z).$$

Matricile Lagrange de interpolare a funcțiilor de două și trei variabile au fost utilizate pe aceleași programe și la derivarea numerică și la integrarea numerică.

Rezultatele obținute în această lucrare pot fi folosite la disciplinele tehnice și în producție, unde apar funcții care depind de doi sau trei parametri, date analitic sau prin tabele experimentale și se cere interpolarea sau aproximarea lor.

Pentru utilizarea practică a programelor rulate se va schimba doar tabelele de date.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Șt. Matei „Matrici pe structuri numeroidale finite (I). Comunicată la simpozionul „Aplicații ale metodelor matematice în economie și tehnică“ Timișoara 5-7 mai 1977.
- [2] D. Isoc, Șt. Matei „Rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți variabili prin metoda colocăției cu ajutorul matricilor Lagrange de interpolare de mari dimensiuni. Comunicată la simpozionul „Aplicații ale metodelor matematice în economie și tehnică“ Timișoara 5-7 mai 1977.
- [3] B. P. Demidovici, I. A. Maron Computational Mathematics Ed. 1976 pg. 567-568.

DIE INTERPOLATION VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN MIT HILFE DER NUMERISCHEN RECHENMASCHINE

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit sind die Methoden zum Berechnen der Lagrangeschen Matrizen für die Interpolation von Funktionen mit zwei und drei Variablen, dargestellt. Es wurden abgerollt auf der Rechenmaschine Lagrangesche Matrizen für die Interpolation von Funktionen mit zwei Variablen, der Dimension $L_{1,1}-L_{11,11}$ und für Funktionen mit drei Variablen der Dimension $L_{1,1,1}-L_{5,5,5}$.

ASPECTE TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL RANDAMENTULUI UNUI CONVERTOR HELIOTERMIC

DE

COLETA DE SABATA, IOAN LUMINOSU

I. Aspecte teoretice. Randamentul global η_g al unui convertor heliotermic este determinat de randamentul optic η_0 și de randamentul termic η_t date prin :

$$\eta_g = \eta_0 \cdot \eta_t \quad (1)$$

$$\eta_0 = \frac{\Phi_a}{\Phi_i} \quad (2)$$

$$\eta_t = \frac{\Phi_u}{\Phi_a} \quad (3)$$

$$\eta_g = \frac{\Phi_u}{\Phi_i} \quad (4)$$

unde mărimile Φ_i , Φ_a și Φ_u au următoarea semnificație : ele reprezintă respectiv densitatea fluxului de energie incident, absorbit și util [1, 2, 3].

Pentru un interval de timp dt și la o diferență de temperatură față de mediu, dată, randamentele devin instantanee și servesc la descrierea eficienței energetice a helioconvertorului.

S-a studiat experimental, în condiții naturale dar apropiate de cele ideale și la incidență normală, urmărindu-se aceeași parametri pentru cazul „fără efect de seră” și „cu efect de seră simplu și dublu”, ultimele cazuri fiind obținute prin acoperirea cu una și două plăci de sticlă de 4 mm grosime, distanțate cu 7,2 mm. Sticla folosită a avut transmitanța în vizibil de 92% și în infra-roșu de (1–2)%.

Notînd cu A coeficientul de absorbție al inso-latorului și cu α coeficientul de transmisie al sticlei, se poate scrie, pentru cele trei cazuri, relațiile :

$$\eta_{01} = A \quad \eta_{02} = \alpha A \quad \eta_{03} = \alpha^2 A \quad (5)$$

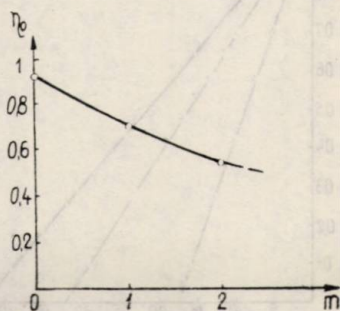


Fig. 1. Randamentul optic ca funcție de numărul straturilor de sticlă.

Randamentul termic se poate explicita în forma :

$$\eta_t = \frac{\Phi_u}{\Phi_a} = \frac{A\Phi_i S_i - S_p C \Delta\theta}{A\Phi_i S_i} = 1 - \frac{S_p}{S_i} \frac{C}{A\Phi_i} \Delta\theta \quad (6)$$

unde S_i și S_p sînt respectiv suprafața de incidență și suprafața de pierderi, c este căldura specifică și $\Delta\theta$ variația de temperatură.

La echilibru :

$$A\Phi_i S_i = S_p \cdot C \cdot \Delta\theta_0 \quad (7)$$

unde $\Delta\theta_0$ reprezintă maximul variației de temperatură față de mediul ambiant, unic determinată :

Relația (6) devine :

$$\eta_r = 1 - \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0} \quad (8)$$

și permite calculul randamentului termic instantaneu pentru diferite temperaturi. Forma ei simplă îi asigură o largă aplicabilitate în exploatările industriale ale energiei solare captate cu insolatoare plane, măsurarea lui $\Delta\theta$ neridicînd probleme.

Limitele η_t sînt situate între valorile 1 pentru $\Delta\theta=0$ și 0 pentru $\Delta\theta=\Delta\theta_0$.

În figura 2 sînt redată valorile calculate cu relația (8) și dreptele obținute scot în evidență creșterea η_t cu mărirea efectului de seră la același interval $\Delta\theta$ de temperatură.

În figura 3 prezentăm dependența randamentului global η_f de intervalele de temperatură $\Delta\theta$.

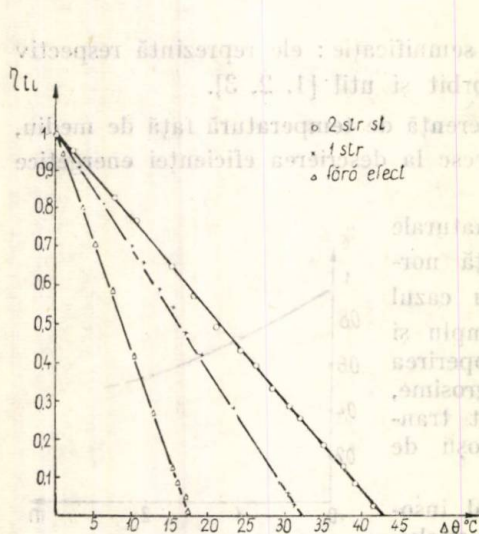


Fig. 2. Randamentul termic instantaneu ca funcție de numărul straturilor de sticlă.

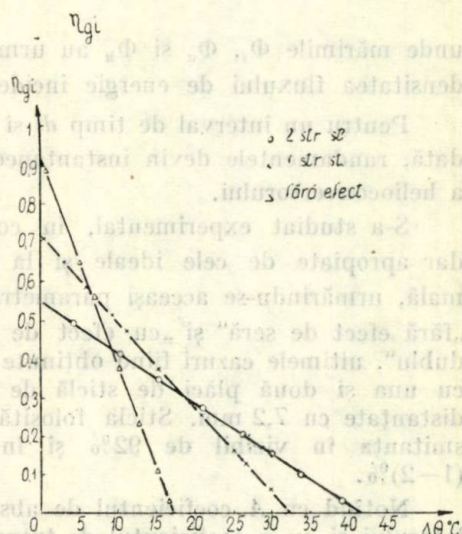


Fig. 3. Randamentul global instantaneu ca funcție de numărul straturilor de sticlă.

Analiză comparativă a celor trei dependente scoate în evidență :

— prin introducerea efectului simplu de seră randamentul optic scade cu 0,21 dar randamentul termic are, corespunzător, o variație $\Delta\eta_t \geq 0,21$ de la o diferență de temperatură $\Delta\theta$ ($^{\circ}\text{C}$) $\geq 8,5^{\circ}\text{C}$, or cum un heliocaptator trebuie să realizeze variații de temperaturi ale agentului termic cu cel puțin 30, 40 $^{\circ}\text{C}$ este evident rolul pozitiv al prezenței stratului de sticlă,

— prin introducerea efectului dublu de seră randamentul optic suferă o variație $\Delta\eta_0 = -0,17$ față de cazul efectului simplu de seră iar $\Delta\eta_t \geq 0,17$ de la $\Delta\theta \geq 22,5^{\circ}\text{C}$. Rezultă că din punct de vedere termic stratul al doilea de sticlă începe să se justifice pentru temperaturi mai mari de 22,5 $^{\circ}\text{C}$ dar apreciem că aduce un câștig destul de modest prin comparație cu dificultățile tehnico-economice pe care la implică.

Randamentul global instantaneu $\eta_g = \eta_0 \cdot \eta_t$ prezintă o dependență lineară, pronunțată, față de tipul de heliocaptator utilizat și analiza din fig. 3 arată că pentru $\Delta\theta \in (0^{\circ}, 6,5^{\circ})$ convine heliocaptatorul fără efect de seră, pentru $\Delta\theta \in (6,5^{\circ} - 18^{\circ})$ convine cel cu efect simplu și pentru $\Delta\theta \in (18^{\circ} - 42^{\circ})$ este mai convenabilă utilizarea efectului dublu.

Analiza pantei η_g în funcție de ordinul efectului de seră $P=f(m)$, fig. 4, indică o scădere puternică între $m=0$ și $m=1$, pantă ce se reduce mult la $m=2$. Rezultă de aici că din punct de vedere al randamentului global, la temperaturi nu prea înalte, se impune în mod indiscutabil heliocaptatorul cu efect simplu de seră, ieftin ușor de construit și de întreținut.

Efectul de seră de ordin superior se justifică economic numai în cazuri mai speciale și în zone geografice cu o insolație puternică și de lungă durată, care să permită atingerea unor temperaturi relativ înalte.

II. Verificări experimentale. Ne-am propus o verificare a rezultatelor din considerațiile prezentate anterior, utilizând un microinsolator plan dotat cu straturi de sticlă de 4 mm grosime, ecartate cu 7,2 mm unul de altul, avînd un rezervor pentru 4,25 l apă; măsurătorile au fost efectuate în lunile octombrie și noiembrie, pe cer senin, cu vînt slab și o durată de expunere de 4 ore.

a. Insolator fără efect de seră : $(\Delta\theta)_{max} = 15^{\circ}\text{C}$ atinsă după 2 ore de funcționare după care variația de temperatură se stabilizează. Calculele dau următoarele valori :

— puterea utilă medie pe intervalul cît temperatura crește este 39,3 w

— puterea utilă medie pe intervalul de expunere este 19,92 w

b. Insolator cu efect simplu de seră : $(\Delta\theta)_{max} = 31^{\circ}\text{C}$ atinsă după 4 ore de funcționare :

— puterea utilă medie pe intervalul de expunere 41,26 w

c. Insolator cu efect dublu de seră : $(\Delta\theta)_{max} = 21^{\circ}\text{C}$ atinsă după 4 ore de funcționare :

— puterea utilă medie pe intervalul de expunere 27,9 w.

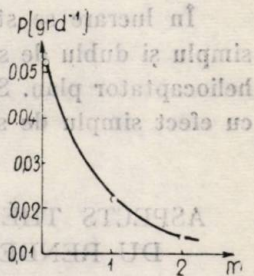


Fig. 4. Panta randamentului global ca funcție de numărul straturilor de sticlă.

Reprezentînd grafic puterea medie utilă pe durata expunerii în funcție de straturile de sticlă ($m=0,1,2$) folosite, se obține curba din fig. 5.

Ea justifică perfect rezultatele teoretice, anterioare, la care trebuie să mai adăugăm dificultățile tehnico-economice legate de realizarea efectului multiplu de seră.

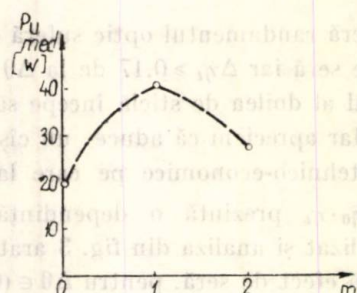


Fig. 5. Puterea utilă medie ca funcție de numărul straturilor de sticlă.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Coop. Medit. p. l'énergie solaire Bul. nr. 14 Jull., 1968, p. 77—83.
- [2] Coop. Medit. p. l'énergie solaire Bul. nr. 16 Jull., 1969, p. 9—16.
- [3] Coop. Medit. p. l'énergie solaire Bul. nr. 14 Avril 1971, p. 39—42.

REZUMAT

În lucrare se studiază teoretic și se verifică experimental influența efectului simplu și dublu de seră asupra randamentului și puterii medii utile obținute pe un heliocaptator plan. Se impune ca cea mai convenabilă, utilizarea insolatorului plan cu efect simplu de seră.

ASPECTS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES DANS L'ÉTUDE DU RENDEMENT, D'UN CONVERTEUR HELIOTHERMIQUE

RÉSUMÉ

On présente dans l'ouvrage un modèle théorique concernant le fonctionnement d'un insolateur plan en trois régimes : sans et avec l'effet de serre, simple et double. Les résultats sont confirmés par les mesures expérimentales.

ACCELERATED MOVEMENTS IN THE AMAR DIAGRAM

BY

B. F. ROTHENSTEIN, A. BUDURA, T. BUDURA

We have previously shown [1] that a third inertial observer can coexist in the Amar diagram with the two inertial observers A and B who define by their relative speed v this diagram. He uses his world line as a time axis and in order to obtain the time measured by him he multiplies the segments measured on this axis by a coefficient R given by

$$R = \frac{(1 - w^2 c^{-2})^{1/2}}{\left(1 \pm \frac{2vw}{c^2} + \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (1)$$

where w is the speed of D relative to A . (The superior sign refers to the case when D moves in the positive sense of the common axes the inferior one to the case when D moves in the negative sense of the same axes).

If the movement of D is not uniform his world line is curvilinear as it is shown in Fig. 1. Introducing a new reference system with perpendicular axes (Oy , Ox), the coordinates of the same event are related as follows

$$ct_A = x \cos^{-1} \beta \quad (2)$$

$$y_A = y + x \operatorname{tg} \beta \quad (3)$$

Let M and N be two events on the world line of D separated by an infinitesimal time interval cdt_D . During this infinitesimal time interval observer D is an inertial one and we have

$$cdt_D = R_1 (dx^2 + dy^2)^{1/2} = R_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx. \quad (4)$$

If at $t_A = t_B = t_D = 0$ all the inertial observers are in the origin O of the Amar diagram we have

$$t_D = \int_0^{ct_A \cos \beta} \frac{R}{c} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx. \quad (5)$$

Taking into account that

$$w = \frac{dy_A}{dt_A} = \cos \beta \left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} \beta\right) \quad (6)$$

we obtain for the coefficient R_1

$$R_1 = \frac{\left[1 - \cos^2 \beta \left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} \beta\right)^2\right]^{1/2}}{\left[1 - 2c^{-1}v \cos \beta \left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} \beta\right) + \cos^2 \beta \left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} \beta\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (7)$$

We consider the case when observer D moves with a constant acceleration relative to A equal to a_A [2].

Speed and space in the inertial system A are given by

$$v_A = a_A t_A \quad (8)$$

$$y_A = a_A t_A^2 / 2 \quad (9)$$

In the system with perpendicular axes (xOy) shown in Fig. 1 the world line of observer D is given by

$$y + x \operatorname{tg} \beta = \frac{a_A x^2}{2c^2 \cos^2 \beta} \quad (10)$$

where from

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_A x}{c^2 \cos^2 \beta} - \operatorname{tg} \beta \quad (11)$$

and (6) becomes [3]

$$\begin{aligned} t_D &= (c \cos \beta)^{-1} \int_0^{c T_A \cos \beta} [(1 - a_A^2 x^2 c^{-4} \cos^{-2} \beta)]^{1/2} dx = \\ &= 2^{-1} [T_A (1 - a_A^2 T_A^2 c^{-2})^{1/2} + c a_A^{-1} \arcsin a_A T_A c^{-1}]. \end{aligned} \quad (12)$$

When observer D moves with a constant acceleration relative to B equal to a_B , his world line is given by [4]

$$y_A = c^2 a_B^{-1} [(1 + a_B^2 t_A^2 c^{-2})^{1/2} - 1] \quad (13)$$

or in terms of x and y

$$y + x \operatorname{tg} \beta = c^2 a_B^{-1} [(1 + a_B^2 c^{-4} x^2 \cos^{-2} \beta)^{1/2} - 1] \quad (14)$$

where from

$$\frac{dy}{dx} = a_B c^{-2} \cos^{-2} \beta x (1 + a_B^2 c^{-4} x^2 \cos^{-2} \beta)^{-1/2} - \operatorname{tg} \beta. \quad (15)$$

The time measured by D is given now by [3]

$$\begin{aligned} t_D &= c^{-1} \cos^{-1} \beta \int_0^{c T_A \cos \beta} (1 + a_B^2 c^{-4} \cos^{-2} \beta x^2)^{-1/2} dx = \\ &= c a_B^{-1} \ln [c^{-1} a_B T_A + (1 + a_B^2 T_A^2 c^{-2})^{1/2}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Using the Radar method [5] observer D determines the coordinates of an event E as it is shown in Fig. 2. M is the event at which D emits the radar signal and N the event at which he receives it back. This events take place for A at $T_{e, A}$ and $T_{r, A}$ respectively. We have

$$t_{E, D} = (2c)^{-1} \left\{ \int_0^{c T_{e, A} \cos \beta} R_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx + \int_0^{c T_{r, A} \cos \beta} R_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \right\} \quad (17)$$

$$x_{E, D} = 2^{-1} \int_{T_{e, A} \cos \beta}^{T_{r, A} \cos \beta} R_1 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (18)$$

The evaluation of the integrals (17) and (18) needs the knowledge of the times $T_{e,A}$ and $T_{r,A}$ as a function of the times $t_{e,A}$ and $t_{r,A}$ at which observer A emits and receives back the light signal used in order to determine the coordinates of the event A . If observer D moves with a constant a_B acceleration

$$T_{e,A} = 2^{-1} t_{e,A} \frac{2c - a_B t_{e,A}}{c - a_B t_{e,A}} \quad (19)$$

$$T_{r,A} = 2^{-1} t_{r,A} \frac{2c + a_B t_{r,A}}{c + a_B t_{r,A}}$$

and taking into account (16)

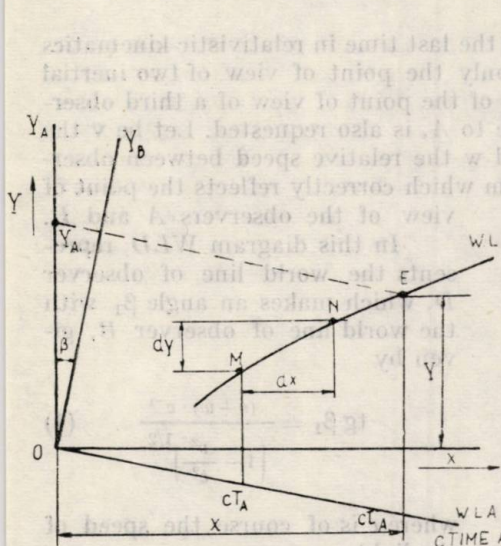


Fig. 1.

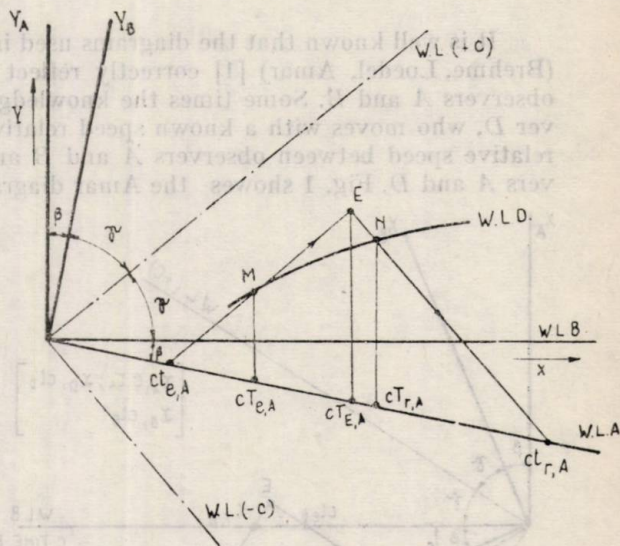


Fig. 2.

$$t_{E,D} = 2^{-1} c a_B^{-1} \ln \{ [c^{-1} a_B T_{r,A} + (1 + c^{-2} a_B^2 T_{r,A}^2)^{1/2}] [c^{-1} a_B T_{e,A} + (1 + c^{-2} a_B^2 T_{e,A}^2)^{1/2}] \}. \quad (21)$$

$$y_{E,D} = c^2 2^{-1} a_B^{-1} \ln \frac{a_B T_{r,A} c^{-1} + (1 + c^{-2} a_B^2 T_{r,A}^2)^{1/2}}{a_B c^{-1} T_{e,A} + (1 + a_B^2 c^{-2} T_{e,A}^2)^{1/2}}. \quad (22)$$

Relations (21) and (22) establish through (19) and (20) a relationship between the coordinates of event E as determined by the inertial observer A ($y_{E,A}$, $ct_{E,A}$) and those determined by observer D , taking into account that

$$t_{e,A} = t_{E,A} - c^{-1} y_{E,A} \quad (23)$$

$$t_{r,A} = t_{E,A} + c^{-1} y_{E,A}.$$

A similar problem was considered by Brehme. [6]

REFERENCES

- [1] B.F. Rothenstein, B. Gavra. Bul. Ştiinţ. mat. fiz. 1978 24 (38) fasc. 2 p. 120.
- [2] Margaret Stautberg Greenwood. Am. J. Phys. 44, 259 (1976).
- [3] I.M. Rîjik, I.S. Gradstein, Tabele de integrale, sume, serii şi produse, Editura Tehnică Bucureşti 1955.
- [4] L. Marder, Time and the space traveller, London-George Allen and Unwin Ltd 1971.
- [5] The theory of space, time and gravitation, Pergamon, New-York 1959.
- [6] R.W. Brehme, Am. J. Phys. 30, 489 (1962).

THE PROBLEM OF THE THIRD INERTIAL OBSERVER IN THE AMAR DIAGRAM

BY

B.F. ROTHENSTEIN AND B. GAVRA

It is well known that the diagrams used in the last time in relativistic kinematics (Brehme, Loedel, Amar) [1] correctly reflect only the point of view of two inertial observers A and B . Some times the knowledge of the point of view of a third observer D , who moves with a known speed relative to A , is also requested. Let be v the relative speed between observers A and B and w the relative speed between observers A and D . Fig. 1 shows the Amar diagram which correctly reflects the point of view of the observers A and B .

In this diagram WLD represents the world line of observer D , which makes an angle β_1 with the world line of observer B , given by

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{(v+w) \cdot c^{-1}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (1)$$

where c is of course the speed of the light.

Imposing to the world line of the observer D to be also the time axis of the same observer, we have to determine the value of a coefficient R with which the segments measured on this new time axis must be multiplied in order to obtain the time measured by this observer. The difficulties encountered by the observer D in finding a spatial axis determine him to use the radar method in order to obtain the coordinates of an event.

Let be E an event explored by the three inertial observers, the coordinates of which are $(x_A, c \cdot t_A)$; $(x_B, c \cdot t_B)$; $(x_D, c \cdot t_D)$ respectively. Let be t_e and t_r the moments at which the light signal used in the radar method is emitted and received back respectively. We have

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{c}{2} \cdot (t_{e,A} - t_{r,A}); & x_B &= \frac{c}{2} \cdot (t_{e,B} - t_{r,B}); & x_D &= \frac{c}{2} \cdot (t_{e,D} - t_{r,D}) \\ t_A &= \frac{1}{2} \cdot (t_{e,A} + t_{r,A}); & t_B &= \frac{1}{2} \cdot (t_{e,B} + t_{r,B}); & t_D &= \frac{1}{2} \cdot (t_{e,D} + t_{r,D}) \end{aligned} \quad (2)$$

The invariance of the relativistic interval requests that

$$x_A^2 - c^2 \cdot t_A^2 = x_B^2 - c^2 \cdot t_B^2 = x_D^2 - c^2 \cdot t_D^2. \quad (3)$$

From (2) and (3) we obtain

$$t_{e,A} \cdot t_{r,A} = t_{e,B} \cdot t_{r,B} = t_{e,D} \cdot t_{r,D} \quad (4)$$

and so, using the notations from Fig. 1 we must have

$$c^2 \cdot t_{e,A} \cdot t_{r,A} = c^2 \cdot t_{e,B} \cdot t_{r,B} = c^2 t_{e,D} \cdot t_{r,D} = R \cdot OM \cdot R \cdot ON. \quad (5)$$

Expressing $t_{e,B}$, $t_{r,B}$, OM and ON as a function of $t_{e,A}$ and $t_{r,A}$ we obtain

$$t_{e,B} = t_{e,A} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \quad (6)$$

$$t_{r,B} = t_{r,A} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \quad (7)$$

$$OM = c \cdot t_{e,A} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin (\beta_1 + \gamma)} \quad (8)$$

$$ON = c \cdot t_{r,A} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos (\beta_1 + \gamma)} \quad (9)$$

where γ is the angle made by the world line of the light and the time axis of the observer B , $(\beta + 2 \cdot \gamma) = 90^\circ$. Replacing this values in (4) we observe that the invariance of the product $t_e \cdot t_r$ is fulfilled for the pair of observers A and B but it is fulfilled for the observer D only in the case when

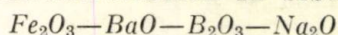
$$R = \frac{(1 - w^2/c^2)^{1/2}}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2} \mp 2 \cdot v \cdot w/c\right)^{1/2}}. \quad (10)$$

It results that third observer D may coexist together with observers A and B in the same Amar diagram using his one world line as a time axis. He determines the coordinates of an event using the radar method and multiplies the segments measured on this axis by the coefficient R given by (10). In (10) the superior sign refers to the case when D moves in the positive sense of the common axes the inferior one to the case when D moves in the negative sense of the same axes.

REFERENCES

- [1] B. F. Rothenstein, Teoria relativității speciale, Ed. Facla 1976.

PROPRIETĂȚI FEROMAGNETICE ÎN SISTEMUL DE OXIZI



DE

MINERVA CRISTEA

I. Introducere. În ultimii ani literatura de specialitate acordă o atenție considerabilă realizării de materiale vitroase parțial devitrificate și vitro-ceramelor precum și studiului proprietăților fizice și a utilizării acestora. [1] [2] [3].

Printr-o cristalizare dirijată a materialelor vitroase se pot obține calități tehnice remarcabile ale acestora. Devitrifierea este considerată în prezent ca o regroupare a rețelei dezordonate într-o stare mai favorabilă energetic și ea se datorește fie tensiunilor interne, fie fluctuațiilor de temperatură și cel mai puțin convenabil, impurităților.

Tendință de cristalizare prezintă materialele vitroase care conțin Fe, Cr, Ti, Au, Ag.

Prezenta investigație și-a propus elaborarea unui material feromagnetic vitros, parțial devitrificat din sistemul $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{—BaO—B}_2\text{O}_3\text{—Na}_2\text{O}$. Literatura subliniază că este extrem de dificilă dacă nu imposibilă, elaborarea unui material vitros cu un conținut mai mare de 20% moli Fe_2O_3 [4].

Primul studiu [5] efectuat asupra materialelor vitroase care conțin ferită de mangan arată că se poate obține un material magnetic numai printr-o răcire rapidă a topiturilor din sistemul $\text{MnO—Fe}_2\text{O}_3\text{—Al}_2\text{O}_3\text{—SiO}_2$ — oxizi alcalini. Shaw și Heasley interpretează aceste rezultate ca o manifestare a comportării superparamagnetice a cristalitelor de $\text{Mn Fe}_2\text{O}_4$ [3].

A) Elaborarea probelor. Probele au fost confecționate prin metoda convențională de topire a oxizilor metalici introduși ca atare sau rezultați prin descompunerea termică a materiilor prime alese potrivit.

Materiile prime utilizate au fost dozate prin cântărire în proporțiile cerute de compoziția finală a probei. Amestecarea acestora s-a efectuat în mojar de porțelan și au fost topite în creuzete superluminoase la 1 430 °C cu palier de două ore.

Topiturile au fost răcite brusc prin turnare pe placă de oțel. Dintr-un număr de 12 probe cu conținut variabil de Fe_2O_3 nici un amestec nu a permis obținerea unei topituri omogene în condițiile menționate, cu excepția unei singure probe, a cărei compoziție este redată în tabelul 1.

Tabelul nr. 1

Oxizi	Conținut în %	Materii prime
B_2O_3	29,3	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$
Fe_2O_3	44,2	Fe_2O_3
Na_2O	17,1	Na_2CO_3
BaO	10,4	BaCO_3

B) Metode de măsură.

1) Difrakția razelor. Proba selecționată a fost adusă în stare de pulbere și supusă unei analize roentgenografice cu un difractometru TUR-M 61, folosindu-se tehnica măsurării impulsurilor cu un contor Geiger-Müller a radiațiilor Cu-K $_{\alpha}$. S-a lucrat cu o viteză unghiulară de 2°/minut.

2) S-a obținut ciclul de histereză a probei feromagnetice, în regim dinamic, la o frecvență de 50 Hz, utilizându-se instalația reprezentată schematic în fig. 1 și descrisă în lucrarea [1].

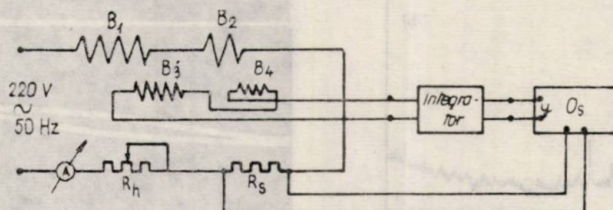


Fig. 1. Schema instalației de ridicare a ciclurilor de histereză.

unde : B_1 — bobina de magnetizare, care prin construcția sa specială permite obținerea unui câmp uniform, avînd o variație de 1,5% pe o distanță de 5 cm;

B_3 — bobina de sondaj care înconjoară eșantionul pulverulent închis într-un tub de sticlă.

Sistemul de compensare de tip variometric este compus din bobina B_2 , parcursă de curentul de magnetizare și bobina B_4 în opoziție cu B_3 ;

R_s — rezistența ohmică care permite obținerea unei căderi de tensiune proporțională cu H din bobina B_1 .

C) Rezultatele experimentale. Proba selecționată a fost adusă în stare de pulbere. Două părți din pulbere au fost supuse unor tratamente termice într-un cuptor electric cu palier de 5 ore la 550 °C, respectiv 650 °C urmate de răcire lentă în cuptorul deconectat.

Rezultatele experimentale obținute prin difrakția razelor X sînt prezentate în fig. 2, pentru proba netratată termic *a*) și pentru probele tratate la 550 °C (*b*), respectiv 650 °C (*c*), evidențiind un grad de devitrifiere sub 5% la proba netratată termic și creșterea lui prin tratament termic urmat de răcire lentă.

Instalația reprezentată schematic în fig. 1 a permis vizualizarea ciclurilor de histereză, a probelor netratate (*a*) și tratate termic (*b*, *c*), care sînt redată în fig. 3 pentru intensitatea maximă a cîmpului bobinei de magnetizare.

Pentru obținerea ciclurilor de histereză probele sub formă de pulbere au fost tratate în tuburi de sticlă cu $\varnothing=0,5$ cm și $l=5,5$ cm.

III. Concluzii 1. În sistemul $\text{Fe}_2\text{O}_3-\text{BaO}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{Na}_2\text{O}$ se pot obține materiale feromagnetice vitroase parțial devitrificate printr-o răcire bruscă a topiturii de la 1 430 °C. Deși gradul de cristalizare a materialului cu 44,2% Fe_2O_3 este sub 5% (fig. 2 *a*) caracterul feromagnetic este pronunțat.

2. Tratamentul termic ulterior, cu răcire lentă de la 550 °C, respectiv 650 °C mărește gradul de divitrifiere mai mult la 550 °C (fig. 2 *b*) decît la 650 °C (fig. 2 *c*).

3. Tratamentul termic la $t>550$ °C urmat de răcire lentă defavorizează proprietățile feromagnetice ale materialului magnetic parțial devitrifiat din sistemul $\text{Fe}_2\text{O}_3-\text{BaO}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{Na}_2\text{O}$.

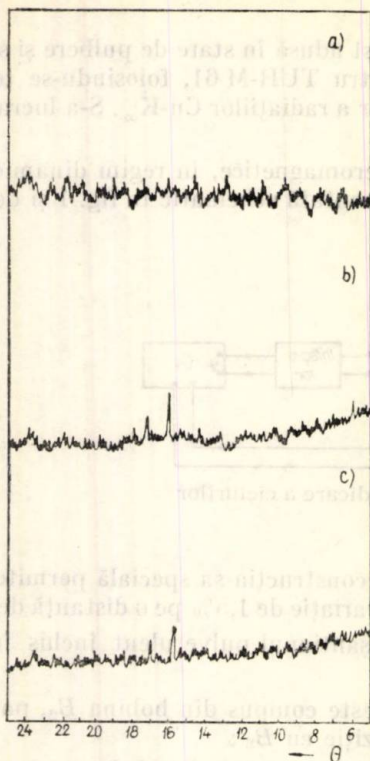


Fig. 2. Roentgenogramele probei netratată (a) și a celor tratate termic (b, c).

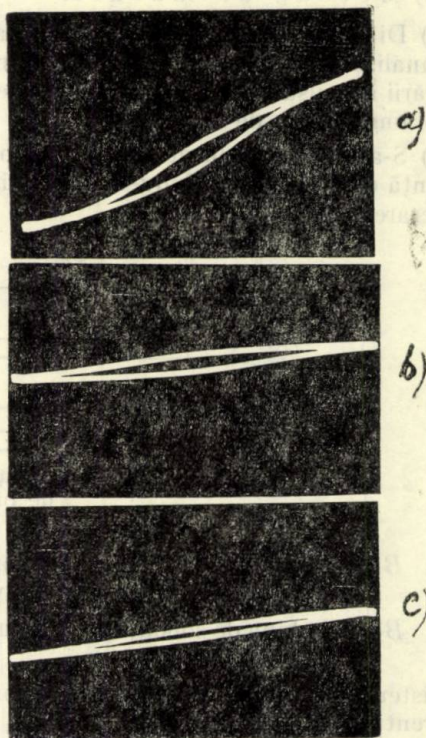
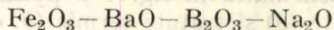


Fig. 3. Ciclurile de histerază a probei netratate termic (a) și a celor tratate (b, c).

BIBLIOGRAFIE

- [1] C. De Sabata, A. Policec, E. Rusu, *Silicates Indus.* 37 (5) 139, 1972.
- [2] K. Zaveta și al., *Czech. J. Phys.* B 23, 1973.
- [3] Schaw R.S., Heasley J.H., *J. Amer. Cer. Soc.* 50, 297, 1967.
- [4] Herczog A., *Glass Industry* 48, 445, 1967.
- [5] Tashiro H., Sakka S., Kokuba T., *J. Ceram. Assoc. Japan*, 72, 20, 1964.

PROPRIETĂȚI FEROMAGNETICE ÎN SISTEMUL DE OXIZI



REZUMAT

În lucrare se prezintă condițiile de obținere a unui material feromagnetic din sistemul de oxizi ($\text{Fe}_2\text{O}_3 - \text{BaO} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{Na}_2\text{O}$) și influența nefavorabilă a tratamentelor termice la temperaturi mai mari de 550°C asupra proprietăților feromagnetice.

DES PROPRIÉTÉS FERROMAGNÉTIQUES DANS LE SYSTÈME D'OXYDES $\text{Fe}_2\text{O}_3 - \text{BaO} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{Na}_2\text{O}$

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage on présente les conditions dans lesquelles on peut obtenir des matériaux ferromagnétiques du système d'oxydes ($\text{Fe}_2\text{O}_3 - \text{BaO} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{Na}_2\text{O}$) et l'influence défavorable des traitements thermiques pour $t > 550^\circ\text{C}$, sur les propriétés magnétiques.

F7414

Raika

**BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA”
TIMIȘOARA**

MATEMATICĂ — FIZICĂ

Tomul 24 (38)

23 (37)

Fascicula 2

**IANUARIE—IUNIE
1978**

